1re G. Interrogation n° 9
Correction du sujet 2

Exercice 1 (cours, 3 points)
Compléter sur l'énoncé :

1. Compléter la formule du cosinus sur le produit scalaire.
   Soient A, B, et C trois points distincts du plan.
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$
2. Expression du produit scalaire en repère orthonormé.
   Soient $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ deux vecteurs dans un repère orthonormé du plan.
   $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx'+yy'$
3. Énoncer les deux expressions du produit scalaire avec les normes.
   Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,
   $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$
   $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\right)$
4. Donner la formule de l'espérance $E(X)$ et celle de la variance $V(X)$ d'une variable aléatoire X dont les valeurs sont x_1, x_2, ..., x_k et les probabilités respectives p_1, p_2, ..., p_k.
   $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i\times p_i$ $\qquad$ $V(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}(x_i-E(X))^2\times p_i$

Exercice 2 (3 points)
Les questions sont indépendantes.

Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. Justifier.

1. $AB = 6$, $AC = 7$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{5\pi}{6}$. D'après la formule du cosinus,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})\\ &= 6\times 7\times\cos(\frac{5\pi}{6})\\ &= 42\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= -21\sqrt{3}\end{aligned}$$

   $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -21\sqrt{3}.}$
2. ABC est un triangle isocèle rectangle en C, et de base $AB = 12$.
   Par projeté, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}AB^2 = \dfrac{12^2}{2} = 72.$ $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 72.}$
3. Le triangle ABC est tel que $AB = 7$, $BC = 4$, et $AC = 6$.
   $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.
   D'après la formule avec les normes utilisant $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$,
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(AB^2+AC^2-CB^2) = \dfrac{1}{2}(49+36-16) = \dfrac{69}{2}$.
   $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{69}{2}.}$

Exercice 3 (3 points)
Soit $ABCD$ un losange de centre O, tel que $AC = 6$ et $BD = 8$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$. Justifier.
   Par projeté, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BD} = -OB\times BD = -4\times 8 = -32.$
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$. Justifier.

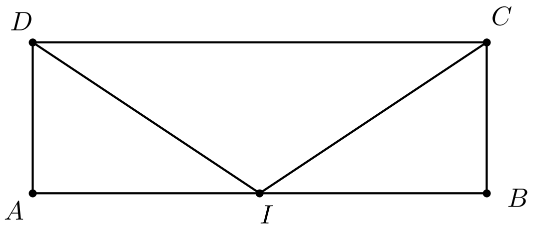
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} &= (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})\\ &= \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}\\ &= AO^2+0+0-OB^2\\ &= 3^2-4^2\\ &= 9-16\\ &= -7\end{aligned}$$

Exercice 4 (2 points)
Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2;3)$, $B(-4;2)$, $C(1;-1)$, et $D(a;-3)$ où a est un nombre réel. Déterminer a pour que les droites (AB) et (CD) soient perpendiculaires.
$(AB)\perp(CD)$ ssi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\ -1\end{pmatrix}$.
De même, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}a-1\\ -2\end{pmatrix}$.
Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = xx'+yy' = -6(a-1)+(-1)\times(-2)$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -6a+6+2 = -6a+8$.
Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ ssi $-6a+8 = 0$ ssi $a = \dfrac{4}{3}$.

Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $a = \dfrac{4}{3}$, soit $D\left(\dfrac{4}{3};-3\right)$.

Exercice 5 (5 points)
Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 2$.

On note I le milieu de $[AB]$.



1. Calculer, en justifiant la réponse, les produits scalaires :
$\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{CB}$ $\qquad\qquad\qquad$ $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{IC}$
On raisonne par projeté orthogonal.
$\boxed{\begin{array}{l}\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}=CB^2=2^2=4.\\ \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{IB}=-AB\times IB=-6\times 3=-18\end{array}}$

2. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC} &= (\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC})\\ &= \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= -IA\times IB+0+0+AD\times BC\\ &= -3\times 3+2\times 2\\ &= -5\end{aligned}$$

(b) En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{CID})$ puis la mesure de l'angle $\widehat{CID}$ à un degré près.
En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles BCI et ADI, on calcule les longueurs IC et ID.
$CI^2=CB^2+BI^2=2^2+3^2=13$, donc $CI=\sqrt{13}$.
De même, on montre que $ID=\sqrt{13}$.
D'après la formule du cosinus,
$\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC}=ID\times IC\times\cos(\widehat{CID})$.
Donc $-5=\sqrt{13}\times\sqrt{13}\times\cos(\widehat{CID})$
$\boxed{\cos(\widehat{CID})=\dfrac{-5}{\sqrt{13}^2}=-\dfrac{5}{13}.}$
Avec la calculatrice, $\boxed{\widehat{CID}\approx 113\text{ degrés.}}$

Exercice 6 (4 points)

Une roue de loterie est partagée en 2 secteurs verts, 5 secteurs blancs et n secteurs rouges ($n>0$).
Après avoir misé 10 €, un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe.
Chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

— Si le secteur est vert, le joueur reçoit 40 € ;
— Si le secteur est blanc, il récupère sa mise ;
— Si le secteur est rouge, il perd sa mise.

Soit X_n la variable aléatoire égale au gain du joueur (en tenant compte de la mise).

1. Déterminer la loi de probabilité de X_n.
$40-10=30$.
Donc X_n prend ses valeurs dans $\{-10;0;30\}$.
$2+5+n=n+7$. La roue compte $(n+7)$ secteurs.
Comme chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant le repère, il y a équiprobabilité.
$P(X_n=-10)=\dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas total}}=\dfrac{n}{n+7}$.
$P(X_n=0)=\dfrac{5}{n+7}$.
$P(X_n=30)=\dfrac{2}{n+7}$.
La loi de probabilité de X_n est résumée dans le tableau :

x_i	-10	0	30
$P(X_n=x_i)$	$\dfrac{n}{n+7}$	$\dfrac{5}{n+7}$	$\dfrac{2}{n+7}$

2. Montrer que $E(X_n)=\dfrac{-10n+60}{n+7}$.

$$\begin{aligned}E(X_n) &= \sum x_i\times p_i\\ &= \frac{-10n+0\times 5+30\times 2}{n+7}\\ &= \frac{-10n+60}{n+7}\end{aligned}$$

3. L'organisateur rentre dans ses frais si $E(X_n)\leqslant -2$. Déterminer le nombre minimal de secteurs rouges qu'il doit prévoir pour ne pas perdre d'argent.
On cherche la plus petite valeur de n pour laquelle $E(X_n)\leqslant -2$, soit $\dfrac{-10n+60}{n+7}\leqslant -2$.
Comme pout tout $n\in\mathbb{N}$, $n+7>0$, on peut multiplier membre à membre l'inégalité par $n+7$ et le sens de l'inégalité est conservé. Donc

$$\begin{aligned}\frac{-10n+60}{n+7} &\leqslant -2\\ -10n+60 &\leqslant -2n-14\\ -8n &\leqslant -74\\ n &\geqslant \frac{74}{8}=9,25\end{aligned}$$

On retient le plus petit entier $n\geqslant 9,25$, c'est-à-dire 10.

À partir de 10 secteurs rouges sur la roue, l'organisateur rentre dans ses frais.