2de. Correction du devoir maison n° 5

Exercice 1 (n° 77 page 272)

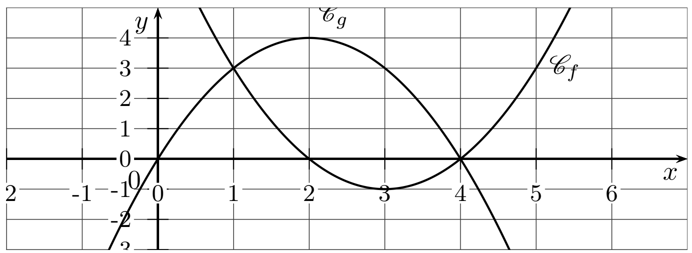
1. Un ordinateur coûte 450 euros, et le vendeur accorde une remise de 6 %.
   Quel est le prix après la remise ?
   Le calcul est $450 \times (1 - 0,06) = 450 \times 0,94 = 423$.
2. La longueur d'une piste d'ULM est de 450 m. On l'augmente de 6 %.
   Quelle sera sa longueur ? $450 \times (1 + 0,06) = 450 \times 1,06 = 477$.
3. 6% des 450 pompiers d'une ville ont moins de 20 ans.
   Combien y a-t-il de pompiers de moins de 20 ans ? $450 \times 0,06 = 27$.

Exercice 2 (n° 78 p 272)

1. $y_1 = 130$ et pour une baisse de 20 %, $t = -0,2$.
   $y_2 = y_1 \times (1 + t) = 130 \times (1 - 0,2) = 130 \times 0,8 = 104$.
   $\boxed{\text{Après réduction, la raquette coûte 104 euros.}}$
2. $y_2 = y_1 \times (1 + t)$, soit $68 = y_1 \times (1 - 0,2) = y_1 \times 0,8$. Donc $y_1 = \dfrac{68}{0,8} = 85$.
   $\boxed{\text{Avant réduction, les chaussures coûtaient 85 euros.}}$
3. $t = \dfrac{y_2 - y_1}{y_1} = \dfrac{26,6 - 28}{28} = -0,05$. $\boxed{\text{Le prix de la casquette a baissé de 5\%.}}$

Exercice 3

On donne ci-dessous la courbe de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.



1. Variations de f

x	$-\infty$		3		$+\infty$
variation de $f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Signe de f

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
signe de $f(x)$		+	0	−	0	+	

2. Variations de g

x	$-\infty$		2		$+\infty$
variation de $f(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	

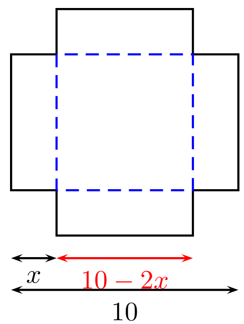
Signe de g

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
signe de $g(x)$		−	0	+	0	−	

3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$. Expliquer la méthode.
   $\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(x) = g(x) \text{ sont les abscisses des points d'intersection de } \mathscr{C}_g \text{ et de } \mathscr{C}_g.\ S = \{1; 4\}.}$
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$. Expliquer la méthode.
   $\boxed{\text{Les solutions de l'inéquation } f(x) < g(x) \text{ sont les abscisses des points où } \mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de } \mathscr{C}_g.\ S =]1; 4[.}$

Exercice 4

On dispose d'un carré de côté 10 cm. Pour fabriquer une boîte sans couvercle, on enlève à chaque coin un carré de côté x (cm), et on relève les bords par pliage (suivant les pointillés). La boîte obtenue est un pavé droit à base carrée. On souhaite déterminer les dimensions de la boîte de volume maximal.



1. Calculer le volume de la boîte si $x = 2$.
   $10 - 2 - 2 = 6$.
   Si $x = 2$, le pavé a une base carrée de côté 6 cm et une hauteur de 2 cm.
   Alors, $V = L \times \ell \times h = 6 \times 6 \times 2 = 72$.
   $\boxed{\text{Pour } x = 2 \text{ cm, le volume de la boîte est de } 72 \text{ cm}^3.}$

2. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
Il est clair que $x \geqslant 0$ et $2x \leqslant 10$.
$\boxed{\text{Donc } x \in [0;5].}$
3. On note $V(x)$ le volume de la boîte.
Montrer que $V(x) = 100x - 40x^2 + 4x^3$.
De façon générale, le pavé a une base carrée de côté $(10 - 2x)$, et sa hauteur mesure x.

$$\begin{aligned} V(x) &= L \times \ell \times h \\ &= (10-2x)^2 \times x \\ &= (100 - 2 \times 10 \times 2x + (2x)^2) \times x \\ &= (100 - 40x + 4x^2) \times x \\ &= 100x - 40x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc, pour tout } x \in [0;5],\ V(x) = 100x - 40x^2 + 4x^3.}$
4. Retrouver le volume pour $x = 2$ à l'aide de la fonction V.

$$\begin{aligned} V(2) &= 100 \times 2 - 40 \times 2^2 + 4 \times 2^3 \\ &= 200 - 40 \times 4 + 4 \times 8 \\ &= 200 - 160 + 32 \\ &= 72 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On retrouve que la boîte a un volume de } 72\ \text{cm}^3.}$
5. Calculer $V(3)$.

$$\begin{aligned} V(3) &= 100 \times 3 - 40 \times 3^2 + 4 \times 3^3 \\ &= 300 - 40 \times 9 + 4 \times 27 \\ &= 300 - 360 + 108 \\ &= 48 \end{aligned}$$

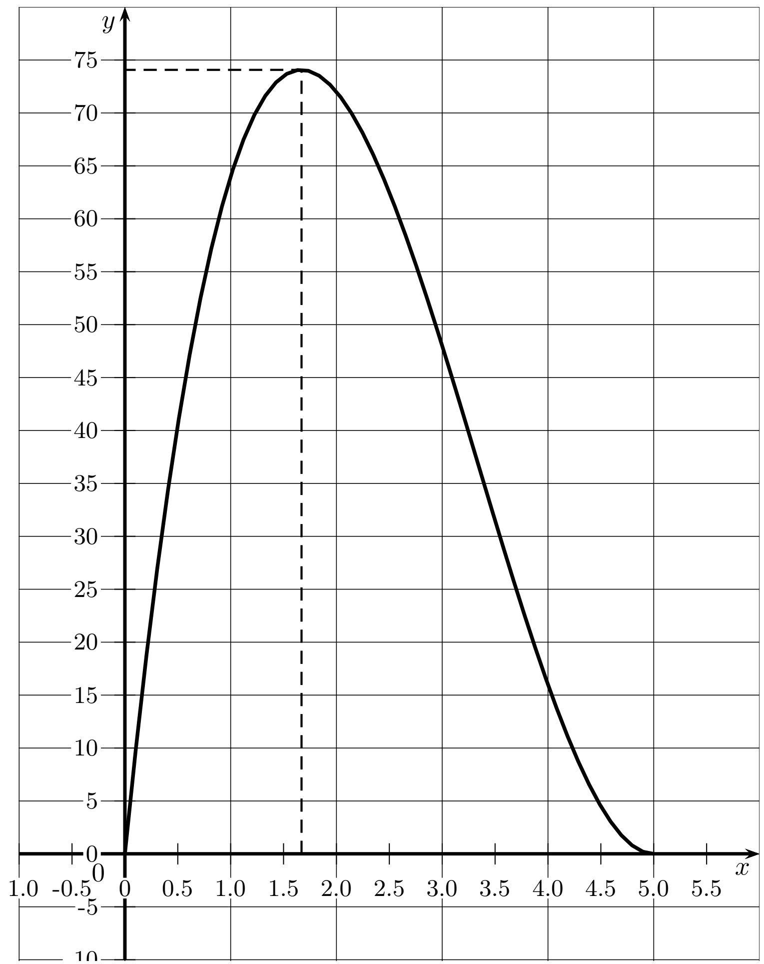
$\boxed{\text{Pour } x = 3 \text{ cm, le volume est de } 48\ \text{cm}^3.}$
6. Calculer l'image de $\frac{5}{3}$ par V (valeur exacte, puis arrondie à 0,01 près).

$$\begin{aligned} V\left(\frac{5}{3}\right) &= 100 \times \frac{5}{3} - 40 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^3 \\ &= \frac{500}{3} - 40 \times \frac{25}{9} + 4 \times \frac{125}{27} \\ &= \frac{4500}{27} - \frac{40 \times 25 \times 3}{27} + \frac{500}{27} \\ &= \frac{4500 - 3000 + 500}{27} \\ &= \frac{2000}{27} \\ &\approx 74.07 \end{aligned}$$

7. (a) À l'aide de la calculatrice compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$V(x)$	0	40.5	64	73.5	72	62.5	48	31.5	16	4.5	0

(b) Représenter graphiquement la fonction V ci-dessous.



(c) Déterminer graphiquement pour quelle(s) valeurs de x le volume est maximal. Quel est ce volume maximal ?

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Le volume semble être maximal pour } x = \frac{5}{3} \text{ (1.67 cm environ).} \\ \text{Le volume maximal de la boîte est de } 74\ \text{cm}^3 \text{ environ.} \\ \text{La valeur exacte du volume maximal est } V(\frac{5}{3}) = \frac{2000}{27} \text{ (admis en 2de)} \end{array}}$