Exercices sur les dérivées et applications
Correction

Exercice 1 (corrigé en classe le 01/04/21)
Soit f la fonction définie sur $[1;7]$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{3-4x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $[1;7]$, et calculer $f'(x)$.
2. Déterminer un encadrement de $f(x)$ valable pour tout $x\in[1;7]$.

Exercice 2
On considère la fonction f définie sur $[-6;3]$ par

$$f(x)=\frac{1}{6}\big(-x^3-3x^2+9x-3\big).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Calculer $f'(x)$.
   f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc sur $[-6;3]$.
   $f'(x)=\dfrac{1}{6}(-3x^2-6x+9)=\dfrac{1}{2}(-x^2-2x+3)$
2. En déduire le tableau de variation de f sur $[-6;3]$.
   On factorise f' en remarquant que 1 est racine évidente (sinon, Δ etc.)
   $f'(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)(-x-3)=-\dfrac{1}{2}(x-1)(x+3)$.
   $f'(x)=0$ ssi $x=1$ ou $x=-3$.
   Le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines, ici $a=-\dfrac{1}{2}<0$.

x	-6		-3		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$8,5$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$1/3$	$\searrow$	-5

   Avec la calculatrice, on obtient les images : $f(-6)=8,5$ etc.
3. La courbe de f admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses sur $[-6;3]$? Justifier. Si oui, donner une équation de chacune.
   $T_a//(Ox)$ ssi $f'(a)=0$.
   Or, on sait que $f'(x)=0$ ssi $x=-3$ ou $x=1$.
   Il y a deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, aux points d'abscisse 1 et -3.
   Équation de la tangente au point d'abscisse a : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
   Équation de T_1 :
   $y=f'(1)(x-1)+f(1)=0(x-1)+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$.
   Équation de T_{-3} :
   $y=f'(-3)(x+3)+f(-3)=0(x+3)-5=-5$.
   Ce sont les droites d'équation $y=-5$ et $y=\dfrac{1}{3}$.
4. Justifier que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$.
   Équation de T_0 :
   On a $f'(0)=\dfrac{1}{2}\times 3=\dfrac{3}{2}$, et $f(0)=\dfrac{1}{6}\times(-3)=-\dfrac{1}{2}$.
   $y=f'(0)(x-0)+f(0)=\dfrac{3}{2}(x-0)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$.
   T_0 a bien pour équation $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$.
5. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$. Justifier.
   On étudie le signe de $f(x)-\left(\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}\right)$.

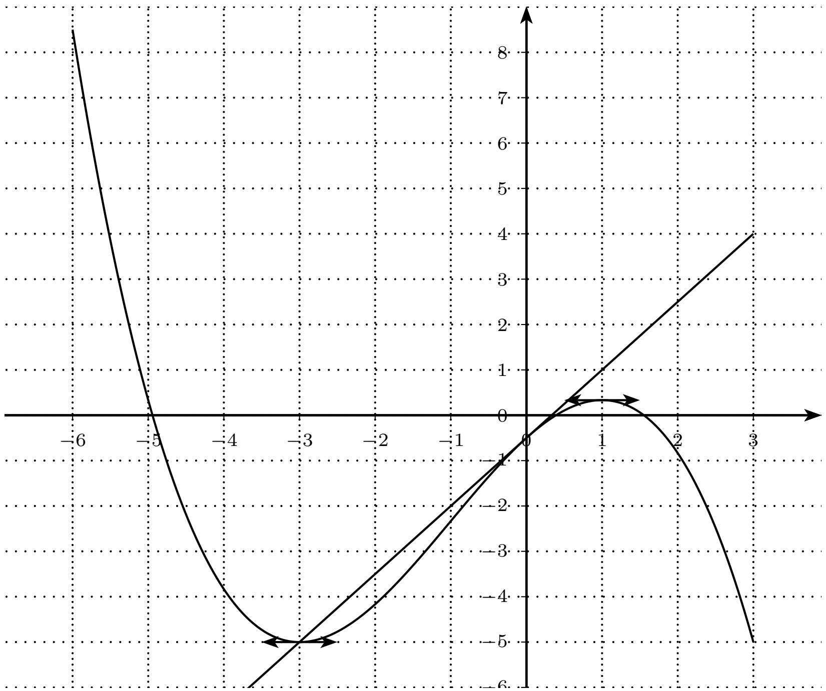
$$\begin{aligned}
f(x)-\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{6}\big(-x^3-3x^2+9x-3\big)-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\\
&= -\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\\
&= -\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2\\
&= \frac{-x^3-3x^2}{6}\\
&= \frac{x^2(-x-3)}{6}
\end{aligned}$$

   L'expression s'annule en 0 et -3.
   Comme $6>0$ et $x^2\geqslant 0$, elle a le même signe que $-x-3$.

x	-6		-3		0		3
$\dfrac{x^2(-x-3)}{6}$		$+$	0	$-$	0	$-$	

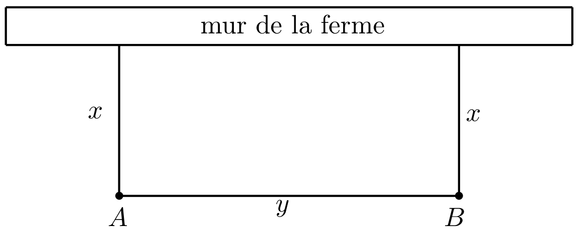
   $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T_0 sur $[-6;-3[$.
   $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de T_0 sur $[-3;0[\cup]0;3]$.
   Les abscisses des points de contact sont -3 et 0.

6. Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ dans un même repère orthonormé. On fera apparaître les tangentes parallèles à (Ox).



Exercice 3

Un fermier décide de réaliser un poulailler de forme rectangulaire le long du mur de sa maison.
Ce poulailler doit avoir une aire de 288 m^2.
Le but du problème est de déterminer où on doit placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale.



La figure représente le poulailler accolé à la ferme en *vue de dessus*.

On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distance entre les 2 piquets A et B.

1. Sachant que l'aire du poulailler est 288 m^2, exprimer y en fonction de x.
   L'aire du rectangle est $L \times \ell$, donc $x \times y = 288$, puis $y = \dfrac{288}{x}$.
2. Démontrer que la longueur du grillage est, pour $x > 0$,
   $l(x) = \dfrac{2x^2 + 288}{x}$.
   $l(x) = 2x + y = 2x + \dfrac{288}{x} = \dfrac{2x^2 + 288}{x}$.
3. Calculer la dérivée de l.
   Par quotient de fonctions dérivables, avec le dénominateur qui ne s'annule pas, la fonction l est dérivable sur $]0; +\infty[$.
   Pour tout $x > 0$, $l'(x) = \dfrac{4x \times x - (2x^2 + 228) \times 1}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 288}{x^2}$.
4. Étudier les variations de l sur $]0; +\infty[$.
   On étudie le signe de $l'(x)$, on cherche donc à factoriser l'expression.
   $l'(x) = \dfrac{2(x^2 - 144)}{x^2} = \dfrac{2(x+12)(x-12)}{x^2}$.
   Sur $]0; +\infty[$, $x^2 > 0$, $2 > 0$, et $(x + 12) > 0$.
   Donc $l'(x)$ a le même signe que $(x - 12)$ sur $]0; +\infty[$.

x	0		12		$+\infty$
$l'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$l(x)$	$\|\|$	$\searrow$	48	$\nearrow$	

   $l(12) = 2 \times 12 + \dfrac{288}{12} = 48$.
5. En déduire les dimensions x et y pour lesquelles la clôture a une longueur minimale.
   La longueur de la clôture est minimale lorsque $x = 12$, et cette longueur minimale est de 48 m.
   Pour information, on a alors $y = \dfrac{288}{12} = 24$.

Exercice 4

Démontrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a $0 \leqslant \dfrac{x+1}{x^2+3} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Indication : on pourra étudier une fonction.
Posons $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$.

Comme un carré est toujours positif, on a $x^2+3>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Si $x\in[0;+\infty[$, il est clair que $x+1>0$.
Donc pour tout $x\in[0;+\infty[$, $f(x)>0$, et donc $0\leqslant\dfrac{x+1}{x^2+3}$.
On va étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$.
f est une fonction fraction rationnelle et son dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{(1)(x^2+3)-(x+1)(2x)}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$.
Comme $(x^2+3)^2>0$, $f'(x)$ a le même signe que son numérateur $-x^2-2x+3$.
$\Delta=b^2-4ac=4+12=16>0$.
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2-4}{-2}=1$.
$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2+4}{-2}=-3$.
Le trinôme est négatif (signe de a) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$-x^2-2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour l'étude de f, on se limite à l'intervalle $[0;+\infty[$, et $f'(x)$ a le même signe que $-x^2-2x+3$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$1/3$	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	

$f(0)=\dfrac{0+1}{0+3}=\dfrac{1}{3}$.
$f(1)=\dfrac{1+1}{1+3}=\dfrac{1}{2}$.
Comme le maximum de f sur $[0;+\infty[$ est de $\dfrac{1}{2}$, (atteint pour $x=1$), on a bien l'inégalité :
pour tout $x\in[0;+\infty[$, $\dfrac{x+1}{x^2+3}\leqslant\dfrac{1}{2}$.
Finalement, pour tout $x\in[0;+\infty[$, $0\leqslant\dfrac{x+1}{x^2+3}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

Exercice 5 (non corrigé)
On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que pour tout $x\neq1$, $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$.
3. Montrer que pour tout $x\neq1$, $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.
4. En déduire le tableau de variations de f.
5. On considère la droite Δ d'équation $y=x+2$. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.
6. Tracer $\mathscr{C}$ et Δ dans un même repère orthonormé.
7. Montrer qu'il existe deux points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur -3.
   Donner alors une équation de chacune de ces tangentes.

Exercice 6
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par quotient, et car le dénominateur ne s'annule pas) et on a :
   $f'(x)=\dfrac{4(x^2+4)-2x\times4x}{(x^2+4)^2}=\dfrac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}=\dfrac{-4(x^2-4)}{(x^2+4)^2}=\dfrac{-4(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2}$.

2. Étudier les variations de f et donner son tableau de variation.
   Pour tout réel x, $(x^2+4)^2>0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $-4(x-2)(x+2)$.
   $-4(x-2)(x+2)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont -2 et 2 et dont le coefficient de x^2 est négatif, on en déduit son signe :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$-4(x-2)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Puis le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variation de f					1		
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			-1				

3. (a) Calculer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.
On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{16}{16} = 1$, donc une équation de $\mathcal{T}$ est $y = x$.

(b) Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{T}$. our tout réel x, on a
$f(x) - x = \dfrac{4x}{x^2+4} - \dfrac{x(x^2+4)}{x^2+4} = \dfrac{4x - x(x^2+4)}{x^2+4} = \dfrac{-x^3}{x^2+4}$.
Pour tout réel x, $x^2 + 4 > 0$, donc $f(x) - x$ a le même signe que $-x^3$, donc :

- Pour tout x de $]-\infty; 0[$, $f(x) - x > 0$, c'est à dire $f(x) > x$, donc $\mathcal{C}$ est au dessus de $\mathcal{T}$
- Pour tout x de $]0; +\infty; [$, $f(x) - x < 0$, c'est à dire $f(x) < x$, donc $\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{T}$

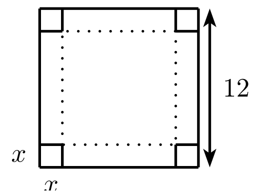
4. Donner deux nombres m et M tels que pour tout réel x de $[-4; 4]$, on ait $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Justifier votre réponse.
Sur $[-4; 4]$, le tableau de variation de f est :

x	-4		-2		2		4
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variation de f	$-\frac{4}{5}$				1		
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			-1				$\frac{4}{5}$

On en déduit que pour tout x de $[-4; 4]$, on a : $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$

Exercice 7

Dans un morceau de carton carré de 12 cm de côté, on découpe dans chaque coin des carrés de x cm de côté.
En relevant les bords, on construit une boîte sans couvercle avec la feuille ainsi découpée.



1. Expliquer pourquoi les valeurs possibles de x appartiennent à l'intervalle $[0; 6]$.
D'après le contexte, x est une longueur, donc $x \geqslant 0$.
De plus, comme le côté du carré mesure 12, on a $2x \leqslant 12$ donc $x \leqslant 6$.
Ainsi, $x \in [0; 6]$.

2. Exprimer le volume de la boîte $V(x)$ en fonction de x.
La boîte a une base carrée de côté $12 - 2x$ et une hauteur de x.
$V(x) = \text{Aire(base)} \times \text{hauteur} = (12 - 2x)^2 \times x$.

3. Déterminer le volume maximal de la boîte. Justifier.
$V(x) = (144 - 48x + 4x^2) \times x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.
La fonction V est dérivable sur $[0; 6]$, car c'est une fonction polynôme.
$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12)$.
Comme $12 > 0$, V' a le même signe que le trinôme $x^2 - 8x + 12$.
$\Delta = 16 > 0$, et l'on trouve pour racines 2 et 6.
Le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines.

x	0		2		6
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$			128		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

$V(2) = 128$.

$\boxed{\text{Le volume est donc maximal lorsque } x = 2 \text{ cm, et ce volume maximal est de } 128 \text{ cm}^3.}$