Correction du devoir commun de 1ère Spé-Maths

Exercice 1 sur 1,5 points

1 – B   2 – D   3 - C

Exercice 2 sur 6,5 points

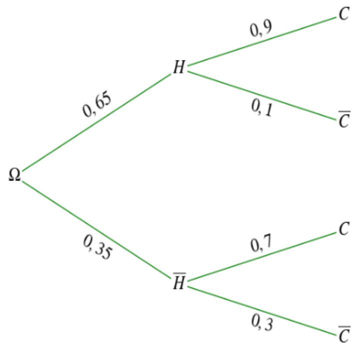
Partie A :

a/ $C \cap H$ est l'évènement : le salarié choisi est un homme qui travaille à temps complet.

$P(C \cap H) = P(H) \times P_H(C) = 0{,}65 \times 0{,}9 = 0{,}585.$

La probabilité que le salarié choisi soit un homme qui travaille à temps complet est de 0,585.

b/



c/ H et $\overline{H}$ forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales : $P(C) = P(C \cap H) + P(C \cap \overline{H})$

$$\begin{aligned} &= 0{,}505 + P(\overline{H}) \times P_{\overline{H}}(C) \\ &= 0{,}505 + 0{,}35 \times 0{,}7 \\ &= 0{,}83 \end{aligned}$$

d/ $P_C(\overline{H}) = \frac{P(C\cap\overline{H})}{P(C)} = \frac{0{,}35\times0{,}7}{0{,}83} \approx 0{,}295.$

Sachant que la personne choisie travaille à temps complet, la probabilité que ce soit une femme est d'environ 0,295.

e/ $P_{\overline{C}}(H) = \frac{P(H\cap\overline{C})}{P(\overline{C})}$ Or, $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}83 = 0{,}17$

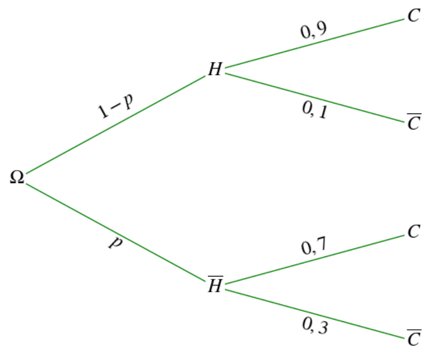
$= \frac{0{,}65\times0{,}1}{0{,}17} \approx 0{,}382$ Si le nom choisi est celui d'un salarié à temps partiel, la probabilité que ce soit celui d'un homme est d'environ 0,382.

f/ $P(C \cap H) = 0{,}585.$

$P(H) \times P(C) = 0{,}65 \times 0{,}83 = 0{,}5395 \neq 0{,}585.$

Les évènements H et C ne sont pas indépendants.

Partie B :



1/ $P(\overline{H} \cap C) = p \times 0{,}7 = 0{,}7p.$

2/ H et $\overline{H}$ forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales : $P(C) = P(C \cap H) + P(C \cap \overline{H})$

$$\begin{aligned} &= (1-p) \times 0{,}9 + 0{,}7p \\ &= 0{,}9 - 0{,}9p + 0{,}7p \\ &= 0{,}9 - 0{,}2p. \end{aligned}$$

3/ L'entreprise souhaite que la proportion de femmes parmi les salariés à temps complet soit de 40%, soit $0{,}4 \Leftrightarrow P_C(\overline{H}) = 0{,}4$

$\Leftrightarrow \frac{P(C\cap\overline{H})}{P(C)} = 0{,}4$

$\Leftrightarrow \frac{0{,}7p}{0{,}9-0{,}2p} = 0{,}4$

$\Leftrightarrow 0{,}7p = 0{,}36 - 0{,}08p$

$\Leftrightarrow 0{,}78p = 0{,}36 \Leftrightarrow p = \frac{0{,}78}{0{,}36} \approx 0{,}462$

Pour atteindre l'objectif, la proportion de femmes dans l'entreprise doit être d'environ 46,2% (et pas de 35%).

Exercice 3	**sur 4 points**

1. $\alpha = -\frac{-12}{2\times3} = 2 \;\; et \;\; \beta = \theta(\alpha) = \theta(2) = 28$ donc : $\theta(t) = 3(t-2)^2 + 28$
2. Dans l'expression de $\theta(t)$ qui est un trinôme du 2^{nd} degré, a = 3 > 0 donc :

t	0	2	$+\infty$
Variations de θ	40 ↘	28	↗

3. La température minimum de l'eau est 28°C.
Le système de chauffage se remet en marche 2 heures après le début de l'observation.
4. $\theta(t) = 55 \quad \Leftrightarrow \quad 3t^2 - 12t + 40 = 55 \quad \Leftrightarrow \quad 3t^2 - 12t - 15 = 0$
$\Delta = 324 > 0$ donc il y a deux solutions : $t_1 = \frac{12-\sqrt{324}}{2\times3} = -1 \;\; \notin [0\,;+\infty[$
$et \quad t_2 = \frac{12+\sqrt{324}}{2\times3} = 5 \;\in\; [0\,;+\infty[$ donc : S = {5}
5. D'après la question précédente, $\theta(t) = 55 \;\; si \; t = 5$
Le système de chauffage s'est remis en marche 2h après le début de l'observation, donc il aura fonctionné pendant 3 heures.

Exercice 4	**sur 5,5 points**

1/ $f(x)$ est de la forme $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 4x - 7$ et $v(x)$=$2x - 2$ et$v$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Donc$u'(x) = 4$ et $v'(x) = 2$

donc $f'(x) = \frac{4\times(2x-2)-2\times(4x-7)}{(2x-2)^2} = \frac{8x-8-8x+14}{(2x-2)^2} = \frac{6}{(2x-2)^2}$

2/ Si la tangente à la courbe est parallèle à la droite d'équation $y = 0{,}5x + 8$, alors son coefficient directeur $f'(x)$ doit être égal à celui de la droite, soit 0,5 :

$f'(x) = 0{,}5$

$\Leftrightarrow \frac{6}{(2x-2)^2} = 0{,}5$

$\Leftrightarrow \frac{6}{(2x-2)^2} = \frac{0{,}5\;(2x-2)^2}{(2x-2)^2}$

$\Leftrightarrow 6 = 0{,}5\;(4x^2 - 8x + 4)$

$\Leftrightarrow 6 = 2x^2 - 4x + 2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times2\times(-4) = 48 > 0$

L'équation a 2 racines distinctes.

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-4\sqrt{3}}{4} = 1 - \sqrt{3}$

et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+4\sqrt{3}}{4} = 1 + \sqrt{3}$

Il existe donc bien 2 points pour lesquels la tangente à la courbe est parallèle à la droite d'équation $y = 0{,}5x + 8$: ils ont pour abscisses $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

3/ <u>Équation de la tangente T à la courbe en a = 2 :</u>$y = f'(2)(x-2) + f(2)$
Or $f'(2) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ et $f(2) = \frac{1}{2}$ donc $y = \frac{3}{2}(x-2) + \frac{1}{2}$soit $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

4/ Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x) - \left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\right) = \frac{4x-7}{2x-2} - (\frac{3}{2}x - \frac{5}{2})$

$= \frac{4x-7}{2x-2} - \frac{3x-5}{2}\times\frac{x-1}{x-1}$

$= \frac{4x-7}{2x-2} - \frac{3x^2-8x+5}{2x-2}$

$= \frac{4x-7-3x^2+8x-5}{2x-2}$

$= \frac{-3x^2+12x-12}{2x-2}$

$= \frac{-3(x^2-4x+4)}{2(x-1)}$

$= \frac{-3(x-2)^2}{2(x-1)}$

5/ Pour donner la position relative de la courbe C_f et de la tangente T sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, il faut résoudre : $f(x) \geq y$

$\Leftrightarrow f(x) - y \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x-7}{2x-2} - (\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3(x-2)^2}{2(x-1)} \geq 0$

<u>Signe de chacun des facteurs :</u>

$*$ $-3 < 0$; $2 > 0$ et $(x - 2)^2 \geq 0$ (et vaut 0 en $x = 2$).

$* x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de – 3		–	‖	–	|	–	
Signe de $(x - 2)^2$		+	‖	+	0	+	
Signe de 2		+	‖	+	|	+	
Signe de $x - 1$		–	‖	+	|	+	
Signe de $f(x) - y$		+	‖	–	0	–	

$f(x) - y \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 1[$

Donc la courbe C_f est au-dessus de T sur $]-\infty ; 1[$ et donc en dessous de T sur $]1 ; +\infty[$

Exercice 5 sur 2,5 points

1. Chaque année, le salaire annuel augmente de 800 € donc : $a_{n+1} = a_n + 800$
2. $a_{n+1} = a_n + 800$ *et* $a_1 = 20000$ donc, par définition, (a_n) est une suite arithmétique de raison 800 et de premier terme $a_1 = 20000$.
Ainsi : $a_n = a_1 + (n-1) \times 800 = 20000 + 800n - 800$ soit $a_n = 800n + 19200$
3. Le salaire de l'employé la 12$^{\text{ième}}$ année est égal à a_{12} : $a_{12} = 800 \times 12 + 19200 = 28800$
Le salaire de l'employé la 12$^{\text{ième}}$ année est de 28800 €.
4. $S = \sum_{i=1}^{12} a_i = 12 \times \frac{a_1 + a_{12}}{2} = 12 \times \frac{20000+28800}{2} = 292800$
La somme totale perçue durant ces 12 années est 292 800 €.