Contrôle n° 3

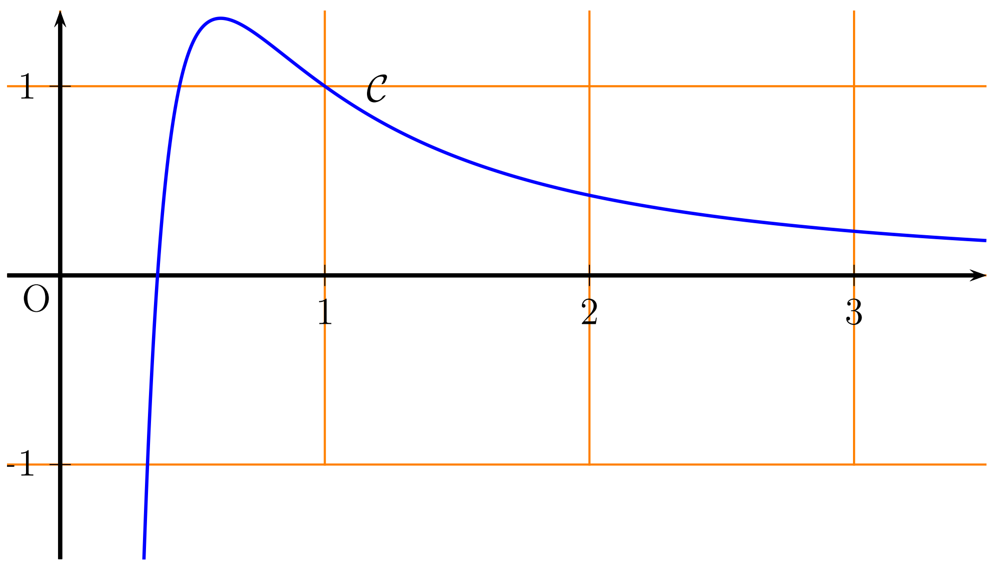
Exercice 1 (6 points)
Les questions sont indépendantes.

1. Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{3}; +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{3x+1}$.
   (a) Donner une primitive de f sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}; +\infty\right[$.
   (b) En déduire la primitive de f qui s'annule en 1.
2. (a) Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction ln sur $]0; +\infty[$.
   (b) En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)\,\mathrm{d}x$.
3. Soit g la fonction définie sur $[1; 2]$ par $g(x) = \dfrac{1}{x^3}$. Déterminer la valeur moyenne de g sur $[1; 2]$.

Exercice 2 (14 points)
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous :



1. (a) Étudier la limite de f en 0.

   (b) Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   (c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.

2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

   (b) Résoudre sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   (c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. (a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   (b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$.

   (a) Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant \mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$.

   (b) Vérifier que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \dfrac{-2 - \ln(x)}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   (c) Calculer I_n en fonction de n.

   (d) Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.