Contrôle de mathématiques n° 1
Correction du sujet 1

Exercice 1 (cours, 2 points)

1. Un nombre est rationnel s'il peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{b}$ où a et b sont des nombres entiers, $b \neq 0$.
2. Soient a et b des réels positifs ou nuls. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, et pour $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exercice 2 (4 points)

1. Mettre les nombres suivants sous forme décimale. Justifier. $A = \dfrac{21}{500}$ $B = \dfrac{11}{4}$
   $A = \dfrac{21}{500} = \dfrac{21 \times 2}{500 \times 2} = \dfrac{42}{1000} = 0,042.$ $B = \dfrac{11}{4} = \dfrac{11 \times 25}{4 \times 25} = \dfrac{275}{100} = 2,75.$
2. Montrer que le nombre $\dfrac{2}{3} + \dfrac{29}{6}$ est un nombre décimal.
   $\dfrac{2}{3} + \dfrac{29}{6} = \dfrac{4}{6} + \dfrac{29}{6} = \dfrac{33}{6} = \dfrac{3 \times 11}{3 \times 2} = \dfrac{11}{2} = \dfrac{55}{10^1}$. $\boxed{\text{Donc c'est un nombre décimal.}}$
3. $(7 - \sqrt{13}) \times (7 + \sqrt{13})$ est-il un entier relatif ? Justifier.
   $(7 - \sqrt{13}) \times (7 + \sqrt{13}) = 7^2 - \sqrt{13}^2 = 49 - 13 = 36 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
   $\boxed{\text{C'est bien un entier relatif car tout entier naturel est un entier relatif.}}$
4. Donner un exemple de nombre décimal mais pas entier compris entre -3 et 0.
   $\boxed{\text{Le nombre } -1,7 \text{ convient.}}$

Exercice 3 (3 points)

1. Écrire $A = \dfrac{2^{-6} \times (2^3)^5}{2^{-7}}$ sous la forme 2^n, $n \in \mathbb{Z}$.
   $A = \dfrac{2^{-6} \times (2^3)^5}{2^{-7}} = \dfrac{2^{-6} \times 2^{15}}{2^{-7}} = \dfrac{2^9}{2^{-7}} = 2^{16}.$
2. Écrire $B = 15^4 \times (9^{-2} \times 25)^2$ sous la forme $3^n \times 5^p$ avec n et p entiers relatifs.
   $B = 15^4 \times (9^{-2} \times 25)^2 = (3 \times 5)^4 \times [(3^2)^{-2} \times 5^2]^2 = 3^4 \times 5^4 \times (3^{-4} \times 5^2)^2.$
   $B = 3^4 \times 5^4 \times 3^{-8} \times 5^4 = 3^{-4} \times 5^8.$

Exercice 4 (2 points)

1. On admet que $\sqrt{11} \approx 3,316\,624\,79$.
   (a) Donner un encadrement décimal de $\sqrt{11}$ d'amplitude 10^{-2}.
   $\boxed{3,31 < \sqrt{11} < 3,32.}$
   (b) Donner l'arrondi de $\sqrt{11}$ à 10^{-3} près. $\boxed{\text{À } 10^{-3} \text{ près, } \sqrt{11} \approx 3,317.}$
2. Donner l'écriture scientifique des nombres suivants.
   (a) $A = 0,009\,81$ $A = 9,81 \times 10^{-3}$.
   (b) $B = 263\ 312\ 500$ $B = 2,633\,125 \times 10^8$.

Exercice 5 (4 points)

1. $a = 2 - 3 \times \dfrac{11}{4} = 2 - \dfrac{33}{4} = \dfrac{8}{4} - \dfrac{33}{4} = -\dfrac{25}{4}.$
2. $b = \dfrac{12}{35} \div \dfrac{60}{21} = \dfrac{12}{35} \times \dfrac{21}{60} = \dfrac{6 \times 2 \times 3 \times 7}{7 \times 5 \times 6 \times 2 \times 5} = \dfrac{3}{25}.$
3. $c = -2 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 + \dfrac{5}{3} + 1 = -2 \times \dfrac{25}{9} + \dfrac{15}{9} + \dfrac{9}{9} = -\dfrac{26}{9}.$
4. $d = \left(6 - \dfrac{4}{5}\right) \times \dfrac{25}{13} = \dfrac{30 - 4}{5} \times \dfrac{25}{13} = \dfrac{26}{5} \times \dfrac{25}{13} = \dfrac{13 \times 2 \times 5 \times 5}{5 \times 13} = 10.$

Exercice 6 (2 points)

1. Mettre $A = 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ sous la forme $\sqrt{a}$ où a est un nombre réel.
   $A = 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{16} \times \sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{16 \times 3}{5}} = \sqrt{\dfrac{48}{5}}.$
2. Mettre $B = \sqrt{50} - 4\sqrt{2} + \sqrt{18}$ sous la forme $a\sqrt{2}$ où a est un nombre entier.
   $B = \sqrt{50} - 4\sqrt{2} + \sqrt{18} = \sqrt{5^2 \times 2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{3^2 \times 2} = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$

Exercice 7 (3 points)

On considère l'algorithme suivant où a, b, c, d, e, f sont des nombres.

> Entrer a
> b prend la valeur $2 \times a$
> c prend la valeur $b + 3$
> d prend la valeur $c \times c$
> e prend la valeur $4 \times a \times a$
> f prend la valeur $d - e$
> Afficher f

1. Que renvoie l'algorithme lorsque l'on entre $a = -2$?

a	b	c	d	e	f
-2	-4	-1	1	16	-15

$\boxed{\text{On obtient } -15.}$

2. Que renvoie l'algorithme lorsque l'on entre $a = 1$?

a	b	c	d	e	f
1	2	5	25	4	21

$\boxed{\text{On obtient } 21.}$

3. Quelle est l'expression de la fonction associée à cet algorithme ?
   $\boxed{f(x) = (2x+3)^3 - 4x^2}$
4. Pour quelle valeur de a peut-on faire afficher $f = 7$ en sortie ?
   On cherche x tel que $f(x) = 7$.
   En développant, $f(x) = 4x^2 + 6x + 6x + 9 - 4x^2 = 12x + 9$.
   D'où $12x + 9 = 7$, et $x = -\dfrac{1}{6}$. $\boxed{\text{Il faut entrer } a = -\dfrac{1}{6} \text{ pour obtenir } f = 7.}$

Exercice 8 (bonus, 1 point)

Déterminer l'écriture scientifique de $A = 16^2 \times 25^3$.
$A = 16^2 \times 25^3 = (2^4)^2 \times (5^2)^3 = 2^8 \times 5^6 = 2^2 \times (2 \times 5)^6 = 4 \times 10^6.$

Contrôle n° 1. Correction du sujet 2

Exercice 9 (cours, 2 points)

1. Un nombre est décimal s'il peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
2. Soient a un réel non nul, n et p des entiers relatifs.
   $a^n \times a^p = a^{n+p}$, et $(a^n)^p = a^{n\times p}$.

Exercice 10 (4 points)

1. Mettre les nombres suivants sous forme décimale (exemple : $\dfrac{1}{2} = 0,5$). Justifier.
   $A = \dfrac{3}{50}$, et $B = \dfrac{7}{200}$.
   $A = \dfrac{3}{50} = \dfrac{3\times 2}{50\times 2} = \dfrac{6}{100} = 0,06$ $\qquad B = \dfrac{7}{200} = \dfrac{7\times 5}{200\times 5} = \dfrac{35}{1000} = 0,035$
2. Montrer que le nombre $\dfrac{61}{6} - \dfrac{2}{3}$ est un nombre décimal.
   $\dfrac{61}{6} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{61}{6} - \dfrac{4}{6} = \dfrac{57}{6} = \dfrac{3\times 19}{3\times 2} = \dfrac{19}{2} = \dfrac{95}{10^1}$. C'est donc un nombre décimal.
3. $(6-\sqrt{11})\times(6+\sqrt{11})$ est-il un nombre entier relatif ? Justifier.
   $(6-\sqrt{11})\times(6+\sqrt{11}) = 6^2 - \sqrt{11}^2 = 36 - 11 = 25 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
   C'est un nombre entier relatif car tout entier naturel est relatif.
4. Donner un exemple de nombre rationnel non décimal. Aucune justification n'est attendue. Le nombre $\dfrac{1}{3}$ convient.

Exercice 11 (3 points)

On détaillera soigneusement les calculs.

1. Écrire $A = \dfrac{7^{11}\times(7^{-3})^5}{7^2}$ sous la forme 7^n, $n \in \mathbb{Z}$.
   $A = \dfrac{7^{11}\times(7^{-3})^5}{7^2} = \dfrac{7^{11}\times 7^{-15}}{7^2} = 7^{11-15-2} = 7^{-6}$.
2. Écrire $B = 18^4 \times (12^{-2}\times 8)^2$ sous la forme $2^n \times 3^p$ avec n et p entiers relatifs.
   $B = 18^4\times(12^{-2}\times 8)^2 = (2\times 3^2)^4\times[(2^2\times 3)^{-2}\times 2^3]^2 = 2^4\times 3^8\times(2^{-4}\times 3^{-2}\times 2^3)^2$.
   $B = 2^4\times 3^8\times(2^{-1}\times 3^{-2})^2 = 2^4\times 3^8\times 2^{-2}\times 3^{-4} = 2^2\times 3^4$.

Exercice 12 (2 points)

Compléter sur le sujet. Aucune justification n'est demandée.

1. On admet que $\sqrt{11} \approx 3,316\,624\,79$.
   (a) Donner un encadrement décimal de $\sqrt{11}$ d'amplitude 10^{-4}.
   $3,3166 < \sqrt{11} < 3,3167$
   (b) Donner l'arrondi de $\sqrt{11}$ à 10^{-2} près.
   À 10^{-2} près, $\sqrt{11} \approx 3,32$.
2. Donner l'écriture scientifique des nombres suivants.
   (a) $A = 0,017\,25$ $\qquad A = 1,725\times 10^{-2}$
   (b) $B = 3\,150\,100\,000$ $\qquad B = 3,150\,1\times 10^9$

Exercice 13 (4 points)

1. $a = 6 - 2\times\dfrac{11}{3} = \dfrac{18}{3} - \dfrac{22}{3} = -\dfrac{4}{3}$.
2. $b = \dfrac{22}{45} \div \dfrac{55}{36} = \dfrac{22}{45}\times\dfrac{36}{55} = \dfrac{2\times 11\times 9\times 4}{9\times 5\times 5\times 11} = \dfrac{8}{25}$.
3. $c = -2\times\left(\dfrac{7}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{4} + 1 = -2\times\dfrac{49}{16} + \dfrac{7}{4} + 1 = -\dfrac{49}{8} + \dfrac{14}{8} + \dfrac{8}{8} = -\dfrac{27}{8}$.
4. $d = \left(8+\dfrac{4}{5}\right)\times\dfrac{25}{11} = \dfrac{40+4}{5}\times\dfrac{25}{11} = \dfrac{44}{5}\times\dfrac{25}{11} = \dfrac{4\times 11\times 5\times 5}{5\times 11} = 20$.

Exercice 14 (2 points)

1. Mettre $A = 5\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ sous la forme $\sqrt{a}$ où a est un nombre réel.
   $A = 5\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{25}\times\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{50}{7}}$.
2. Mettre $B = \sqrt{12} - \sqrt{3} + \sqrt{75}$ sous la forme $a\sqrt{3}$ où a est un nombre entier.
   $B = \sqrt{12} - \sqrt{3} + \sqrt{75} = \sqrt{2^2\times 3} - \sqrt{3} + \sqrt{5^2\times 3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

Exercice 15 (3 points)

On considère l'algorithme suivant où a, b, c, d, e, f sont des nombres.

Entrer a
b prend la valeur $5\times a$
c prend la valeur $b-1$
d prend la valeur $c\times c$
e prend la valeur $25\times a\times a$
f prend la valeur $d-e$
Afficher f

1. Que renvoie l'algorithme lorsque l'on entre $a=-2$?

a	b	c	d	e	f
-2	-10	-11	121	100	21

Il renvoie 21.

2. Que renvoie l'algorithme lorsque l'on entre $a=1$?

a	b	c	d	e	f
1	5	4	16	25	-9

Il renvoie -9.

3. Quelle est l'expression de la fonction associée à cet algorithme ?
   $f(x) = (5x-1)^2 - 25x^2 = -10x+1$.
4. Pour quelle valeur de a peut-on faire afficher $f=7$ en sortie ?
   En développant, $f(x) = (5x-1)^2 - 25x^2 = 25x^2 - 5x - 5x + 1 - 25x^2 = -10x+1$.
   $f(x) = 7$ ssi $-10x+1 = 7$ ssi $x = -\dfrac{3}{5}$. Il faut entrer la valeur $-\dfrac{3}{5}$.

Exercice 16 (bonus, 1 point)

Déterminer l'écriture scientifique de $A = 16^2\times 25^3$.
$A = 16^2\times 25^3 = (2^4)^2\times(5^2)^3 = 2^8\times 5^6 = 2^2\times(2\times 5)^6 = 4\times 10^6$.