

Contrôle de mathématiques n° 1
Correction du sujet 1

Exercice 1 (cours, 2 points)

- Un nombre est rationnel s'il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des nombres entiers, $b \neq 0$.
- Soient a un réel non nul, n et p des entiers relatifs.
 $a^n \times a^p = a^{n+p}$, et $(a^n)^p = a^{n \times p}$.

Exercice 2 (5 points)

- Mettre les nombres suivants sous forme décimale (exemple : $\frac{1}{2} = 0,5$). Justifier.

$$A = \frac{7}{5} = \frac{7 \times 2}{5 \times 2} = \frac{14}{10} = 1,4. \quad B = \frac{11}{4} = \frac{11 \times 25}{4 \times 25} = \frac{275}{100} = 2,75.$$

- Montrer que le nombre $\frac{2}{3} + \frac{29}{6}$ est un nombre décimal.

$$\frac{2}{3} + \frac{29}{6} = \frac{4}{6} + \frac{29}{6} = \frac{33}{6} = \frac{3 \times 11}{3 \times 2} = \frac{11}{2} = \frac{55}{10}.$$

Donc c'est un nombre décimal.

- Le nombre $(3 - \sqrt{13}) \times (3 + \sqrt{13})$ est-il un entier ? Justifier.

$$(3 - \sqrt{13}) \times (3 + \sqrt{13}) = 3^2 - \sqrt{13}^2 = 9 - 13 = -4 \in \mathbb{Z}.$$

C'est bien un entier relatif.

- Donner un exemple de nombre décimal mais pas entier compris entre -3 et 0 .

Le nombre $-1,7$ convient.

- Donner un exemple de nombre irrationnel. Aucune justification n'est attendue.

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 3 (3 points)

- Écrire $A = \frac{2^{-6} \times (2^3)^5}{2^{-7}}$ sous la forme 2^n , $n \in \mathbb{Z}$.

$$A = \frac{2^{-6} \times (2^3)^5}{2^{-7}} = \frac{2^{-6} \times 2^{15}}{2^{-7}} = \frac{2^9}{2^{-7}} = 2^{16}.$$

- Écrire $B = 15^4 \times (9^{-2} \times 25)^2$ sous la forme $3^n \times 5^p$ avec n et p entiers relatifs.

$$B = 15^4 \times (9^{-2} \times 25)^2 = (3 \times 5)^4 \times [(3^2)^{-2} \times 5^2]^2 = 3^4 \times 5^4 \times (3^{-4} \times 5^2)^2. \\ B = 3^4 \times 5^4 \times 3^{-8} \times 5^4 = 3^{-4} \times 5^8.$$

Exercice 4 (2 points)

- On admet que $\sqrt{11} \approx 3,316\,624\,79$.

- Donner un encadrement décimal de $\sqrt{11}$ d'amplitude 10^{-2} .

$$3,31 < \sqrt{11} < 3,32.$$

- Donner l'arrondi de $\sqrt{11}$ à 10^{-3} près.

$$\text{À } 10^{-3} \text{ près, } \sqrt{11} \approx 3,317.$$

- Donner l'écriture scientifique des nombres suivants.

(a) $A = 0,009\,81$

$$A = 9,81 \times 10^{-3}.$$

(b) $B = 263\,312\,500$

$$B = 2,633\,125 \times 10^8.$$

Exercice 5 (4 points)

$$1. a = 2 - 3 \times \frac{11}{4} = 2 - \frac{33}{4} = \frac{8}{4} - \frac{33}{4} = -\frac{25}{4}.$$

$$2. b = \frac{12}{35} \div \frac{60}{21} = \frac{12}{35} \times \frac{21}{60} = \frac{6 \times 2 \times 3 \times 7}{7 \times 5 \times 6 \times 2 \times 5} = \frac{3}{25}.$$

$$3. c = -2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} + 1 = -2 \times \frac{25}{9} + \frac{15}{9} + \frac{9}{9} = -\frac{26}{9}.$$

$$4. d = \left(6 - \frac{4}{5}\right) \times \frac{25}{13} = \frac{30 - 4}{5} \times \frac{25}{13} = \frac{26}{5} \times \frac{25}{13} = \frac{13 \times 2 \times 5 \times 5}{5 \times 13} = 10.$$

Exercice 6 (4 points)

On considère l'algorithme suivant où a, b, c, d, e, f sont des nombres.

Entrer a
 b prend la valeur $2 \times a$
 c prend la valeur $b + 3$
 d prend la valeur $c \times c$
 e prend la valeur $4 \times a \times a$
 f prend la valeur $d - e$
 Afficher f

- Que renvoie l'algorithme lorsque l'on entre $a = -2$?

a	b	c	d	e	f
-2	-4	-1	1	16	-15

On obtient -15 .

- Que renvoie l'algorithme lorsque l'on entre $a = 1$?

a	b	c	d	e	f
1	2	5	25	4	21

On obtient 21 .

- Quelle est l'expression de la fonction associée à cet algorithme ?

$$f(x) = (2x + 3)^3 - 4x^2$$

- Pour quelle valeur de a peut-on faire afficher $f = 7$ en sortie ?

On cherche x tel que $f(x) = 7$.

En développant, $f(x) = 4x^2 + 6x + 6x + 9 - 4x^2 = 12x + 9$.

D'où $12x + 9 = 7$, et $x = -\frac{1}{6}$.

Il faut entrer $a = -\frac{1}{6}$ pour obtenir $f = 7$.

Exercice 7 (bonus, 1 point)

Déterminer l'écriture scientifique de $A = 16^2 \times 25^3$.

$$A = 16^2 \times 25^3 = (2^4)^2 \times (5^2)^3 = 2^8 \times 5^6 = 2^2 \times (2 \times 5)^6 = 4 \times 10^6.$$

Contrôle n° 1. Correction du sujet 2

Exercice 8 (cours, 2 points)

- Un nombre est décimal s'il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- Soient a un réel non nul, n et p des entiers relatifs.
 $a^n \times a^p = a^{n+p}$, et $(a^n)^p = a^{n \times p}$.

Exercice 9 (5 points)

- Mettre les nombres suivants sous forme décimale (exemple : $\frac{1}{2} = 0,5$). Justifier.

$$A = \frac{3}{5}, \text{ et } B = \frac{7}{25}.$$

$$A = \frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$B = \frac{7}{25} = \frac{7 \times 4}{25 \times 4} = \frac{28}{100} = 0,28$$

- Montrer que le nombre $\frac{61}{6} - \frac{2}{3}$ est un nombre décimal.

$$\frac{61}{6} - \frac{2}{3} = \frac{61}{6} - \frac{4}{6} = \frac{57}{6} = \frac{19}{2} = \frac{95}{100}. \quad \boxed{\text{C'est donc un nombre décimal.}}$$

- Le nombre $(6 - \sqrt{11}) \times (6 + \sqrt{11})$ est-il un nombre entier ? Justifier.

$$(6 - \sqrt{11}) \times (6 + \sqrt{11}) = 6^2 - \sqrt{11}^2 = 36 - 11 = 25 \in \mathbb{N}.$$

$\boxed{\text{C'est un nombre entier naturel.}}$

- Donner un exemple de nombre décimal mais pas entier compris entre -1 et 1 .

$\boxed{\text{Le nombre } 0,27 \text{ convient.}}$

- Donner un exemple de nombre rationnel non décimal. Aucune justification n'est attendue.

$\boxed{\text{Le nombre } \frac{1}{3} \text{ convient.}}$

Exercice 10 (3 points)

On détaillera soigneusement les calculs.

- Écrire $A = \frac{7^{11} \times (7^{-3})^5}{7^2}$ sous la forme 7^n , $n \in \mathbb{Z}$.

$$A = \frac{7^{11} \times (7^{-3})^5}{7^2} = \frac{7^{11} \times 7^{-15}}{7^2} = 7^{11-15-2} = 7^{-6}.$$

- Écrire $B = 18^4 \times (12^{-2} \times 8)^2$ sous la forme $2^n \times 3^p$ avec n et p entiers relatifs.

$$B = 18^4 \times (12^{-2} \times 8)^2 = (2 \times 3^2)^4 \times [(2^2 \times 3)^{-2} \times 2^3]^2 = 2^4 \times 3^8 \times (2^{-4} \times 3^{-2} \times 2^3)^2 \\ B = 2^4 \times 3^8 \times (2^{-1} \times 3^{-2})^2 = 2^4 \times 3^8 \times 2^{-2} \times 3^{-4} = 2^2 \times 3^4.$$

Exercice 11 (2 points)

Compléter sur le sujet. Aucune justification n'est demandée.

- On admet que $\sqrt{11} \approx 3,316\,624\,79$.

- Donner un encadrement décimal de $\sqrt{11}$ d'amplitude 10^{-4} .

$$\boxed{3,3166 < \sqrt{11} < 3,3167}$$

- Donner l'arrondi de $\sqrt{11}$ à 10^{-2} près.

$$\boxed{\text{À } 10^{-2} \text{ près, } \sqrt{11} \approx 3,32.}$$

- Donner l'écriture scientifique des nombres suivants.

$$(a) A = 0,01725$$

$$A = 1,725 \times 10^{-2}$$

$$(b) B = 3\,150\,100\,000$$

$$B = 3,1501 \times 10^9$$

Exercice 12 (4 points)

$$1. a = 6 - 2 \times \frac{11}{3} = \frac{18}{3} - \frac{22}{3} = -\frac{4}{3}.$$

$$2. b = \frac{22}{45} \div \frac{55}{36} = \frac{22}{45} \times \frac{36}{55} = \frac{2 \times 11 \times 9 \times 4}{9 \times 5 \times 5 \times 11} = \frac{8}{25}.$$

$$3. c = -2 \times \left(\frac{7}{4}\right)^2 + \frac{7}{4} + 1 = -2 \times \frac{49}{16} + \frac{7}{4} + 1 = -\frac{49}{8} + \frac{14}{8} + \frac{8}{8} = -\frac{27}{8}.$$

$$4. d = \left(8 + \frac{4}{5}\right) \times \frac{25}{11} = \frac{40 + 4}{5} \times \frac{25}{11} = \frac{44}{5} \times \frac{25}{11} = \frac{4 \times 11 \times 5 \times 5}{5 \times 11} = 20.$$

Exercice 13 (4 points)

On considère l'algorithme suivant où a, b, c, d, e, f sont des nombres.

Entrer a

b prend la valeur $5 \times a$

c prend la valeur $b - 1$

d prend la valeur $c \times c$

e prend la valeur $25 \times a \times a$

f prend la valeur $d - e$

Afficher f

- Que renvoie l'algorithme lorsque l'on entre $a = -2$?

a	b	c	d	e	f
-2	-10	-11	121	100	21

$\boxed{\text{Il renvoie } 21.}$

- Que renvoie l'algorithme lorsque l'on entre $a = 1$?

a	b	c	d	e	f
1	5	4	16	25	-9

$\boxed{\text{Il renvoie } -9.}$

- Quelle est l'expression de la fonction associée à cet algorithme ?

$$\boxed{f(x) = (5x - 1)^2 - 25x^2 = -10x + 1.}$$

- Pour quelle valeur de a peut-on faire afficher $f = 7$ en sortie ?

$$\text{En développant, } f(x) = (5x - 1)^2 - 25x^2 = 25x^2 - 5x - 5x + 1 - 25x^2 = -10x + 1.$$

$$f(x) = 7 \text{ ssi } -10x + 1 = 7 \text{ ssi } x = -\frac{3}{5}. \quad \boxed{\text{Il faut entrer la valeur } -\frac{3}{5}.}$$

Exercice 14 (bonus, 1 point)

Déterminer l'écriture scientifique de $A = 16^2 \times 25^3$.

$$A = 16^2 \times 25^3 = (2^4)^2 \times (5^2)^3 = 2^8 \times 5^6 = 2^2 \times (2 \times 5)^6 = 4 \times 10^6.$$