1re G. Interrogation n° 6 Correction du Sujet 2

Exercice 1 (cours, 3 points)

1. Donner la définition d'une suite (u_n) arithmétique.
   Une suite (u_n) est arithmétique si l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant un même nombre r (la raison). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
2. Terme général d'une suite arithmétique.
   Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1.
   Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 + (n-1) \times r$.
3. Donner une formule de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.
   $$S = \frac{(\text{premier terme } + \text{ dernier terme})}{2} \times (\text{nombre de termes})$$

Exercice 2 (5 points)

1. Soit (a_n) la suite définie pour tout entier n par $a_n = \left(3 - \frac{1}{2}n\right)^2$. Calculer a_0, a_1 et a_2.
   $a_0 = \left(3 - \frac{1}{2} \times 0\right)^2 = 9.$ $a_1 = \left(3 - \frac{1}{2} \times 1\right)^2 = \frac{25}{4}.$
   $a_2 = \left(3 - \frac{1}{2} \times 2\right)^2 = 4.$
2. Soit (b_n) la suite définie par $b_0 = 5$ et pout tout $n \geqslant 0$, $b_{n+1} = -\frac{2}{3}b_n + 1$. Calculer b_1 et b_2.
   $b_1 = -\frac{2}{3}b_0 + 1 = -\frac{2}{3} \times 5 + 1 = -\frac{7}{3}$. $b_2 = -\frac{2}{3}b_1 + 1 = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{7}{3}\right) + 1 = \frac{23}{9}.$
3. Soit (c_n) la suite définie par $c_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = c_n - n^2 + 3$. Calculer c_1 et c_2.
   $c_1 = c_0 - 0^2 + 3 = 3 - 0 + 3 = 6.$ $c_2 = c_1 - 1^2 + 3 = 6 - 1 + 3 = 8.$
4. Soit (d_n) la suite définie par $d_0 = 1$, $d_1 = 1$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+2} = 3d_{n+1} + d_n$. Calculer d_2 et d_3.
   $d_2 = 3d_1 + d_0 = 3 \times 1 + 1 = 4.$ $d_3 = 3d_2 + d_1 = 3 \times 4 + 1 = 13.$
5. Soit (k_n) la suite définie par son premier terme $k_0 = 3$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $k_{n+1} = 1 + \frac{k_n}{n+4}$. À l'aide de la calculatrice, donner k_{10} arrondi à 10^{-3}. Aucune justification n'est demandée. $k_{10} \approx 1{,}084$

Exercice 3 (3 points)

Soit (V_n) la suite arithmétique de premier terme $V_0 = 4$ et de raison 5.

1. Calculer V_{20}.
   Pour tout $n \geqslant 0$, $V_n = V_0 + nr$. Donc $V_{20} = V_0 + 20r = 4 + 20 \times 5 = 104$.
2. Calculer $S_{20} = V_0 + V_1 + \cdots + V_{20}$.
   $S_{20} = \frac{(V_0 + V_{20}) \times 21}{2} = \frac{(4 + 104) \times 21}{2} = 54 \times 21 = 1134.$

Exercice 4 (2 points)

Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_0 = 5$ et $u_7 = 36{,}5$.

1. Déterminer la raison r de la suite.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$, donc $u_7 = u_0 + 7r$.
   $36{,}5 = 5 + 7r$, donc $r = \frac{36{,}5 - 5}{7} = 4{,}5$.
2. En déduire u_1.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$, donc $u_1 = u_0 + r = 54{,}5 = 9{,}5$.

Exercice 5 (7 points)

Le salaire net de Monique était de 1600 euros en janvier 2013. Chaque mois il augmente de 9 euros.
On pose $v_0 = 1600$ le salaire du mois de janvier 2013,, on note v_1 le salaire du mois de février 2013 et pour tout $n \geqslant 0$, v_n le salaire du mois de rang $n+1$.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 0,\ v_{n+1} = v_n + 9.}$
2. Exprimer v_n en fonction de n. Justifier.
   (v_n) est la suite arithmétique de 1er terme $v_0 = 1600$ et de raison 9.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 0,\ v_n = v_0 + nr = 1600 + 9n.}$
3. Calculer le salaire du mois de janvier 2014.
   Janvier 2014 correspond à $n = 12$.
   $v_{12} = 1600 + 9 \times 12 = 1708$. $\boxed{\text{Le salaire de janvier 2014 est de 1708 euros.}}$
4. À quelle date le salaire de Monique dépassera-t-il pour la première fois 2000 euros ? Justifer.
   $v_n \geqslant 2000$ ssi $1600 + 9n \geqslant 2000$, soit $9n \geqslant 400$, $n \geqslant \frac{400}{9} \approx 44{,}4$.
   Le plus petit entier n qui convient est $n = 45$.
   $\boxed{\text{Le salaire dépasse 2000 euros pour la 1re fois le mois correspondant à } n = 45 \text{ soit en octobre 2016.}}$
5. Quelle somme totale percevra-t-elle comme salaire de janvier 2013 à décembre 2023 inclus ?
   La période janvier 2013 à décembre 2023 correspond à exactement 11 années, soit $11 \times 12 = 132$ mois.
   Il s'agit donc de calculer la somme des 132 premiers termes de la suite (v_n), de v_0 à v_{131}.
   $v_{131} = v_0 + 131r = 1600 + 131 \times 9 = 2779.$
   $$\begin{aligned} v_0 + v_1 + \cdots + v_{131} &= \frac{v_0 + v_{131}}{2} \times 132 \\ &= \frac{1600 + 2779}{2} \times 132 \\ &= 289\,014 \end{aligned}$$
   $\boxed{\text{Le montant total des salaires accumulés sur la période janvier 2013-décembre 2023 est de 289 014 euros.}}$