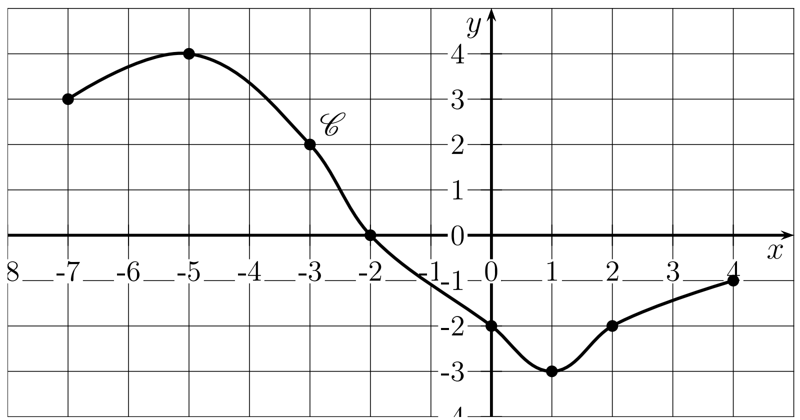
Seconde. Interrogation de mathématiques n° 8
Correction du Sujet 2

Exercice 1 (questions de cours, 4 points)

1. Donner la définition d'une fonction f décroissante sur un intervalle I.
   On dit que f est décroissante sur I lorsque pour tous x_1 et x_2 appartenant à I :
   $$\text{si } x_1 < x_2, \text{ alors } f(x_1) \geqslant f(x_2).$$
2. Minimum d'une fonction. Compléter.
   Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit $a \in I$.
   On dit que f admet un minimum en a lorsque pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(a)$.
3. Énoncer le théorème décrivant les variations des fonction affines.
   Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
   Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (4 points)

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.



1. Montrer que f n'est pas décroissante sur $[-7; 4]$.
   Il est clair que $1 < 2$.
   Or, comme $f(1) = -3$ et $f(2) = -2$, on a $f(1) < f(2)$.
   Donc f n'est pas décroissante sur $[-7; 4]$.
2. Donner le tableau de variation de f, sans justifier.

x	-7		-5		1		4
$f(x)$	3	↗	4	↘	-3	↗	-1

3. Donner le tableau de signe de f, sans justifier.

x	-7		-2		4
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice 3 (7 points)

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-5; 2]$.

x	-5		-4		-2		0		2
$f(x)$	1	↗	3	↘	-2	↗	$1/2$	↘	-1

De plus, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -3 et -1 et 1.

1. Indiquer le maximum de f sur$[-5; 2]$ et en quelle(s) valeur(s) il est atteint. (On ne demande pas de justifier).
   $\boxed{\text{Le maximum de } f \text{ est } 3, \text{ il est atteint en } -4.}$
2. Donner le minimum de f sur$[-5; 2]$ et en quelle(s) valeur(s) il est atteint. (On ne demande pas de justifier).
   $\boxed{\text{Le minimum de } f \text{ est } -2, \text{ il est atteint en } -2.}$

3. Comparer $f(-1,4)$ et $f(-1,1)$. Justifier.

$-1,4 < -1,1$, et f est croissante sur $[-2;0]$, donc $f(-1,4) \leqslant f(-1,1)$.

4. Compléter l'encadrement suivant (sans justification) :
Lorsque $x \in [-5;-2]$, $\boxed{-2 \leqslant f(x) \leqslant 3.}$

5. Donner un encadrement de $f(-4.5)$ et de $f(1,5)$. Peut-on comparer ces deux nombres ?

On a $1 \leqslant f(-4,5) \leqslant 3$, et $-1 \leqslant f(1,5) \leqslant 0,5$.
Comme $f(1,5) \leqslant 0,5 < 1 \leqslant f(-4,5)$,
on a $f(1,5) < f(-4,5)$.

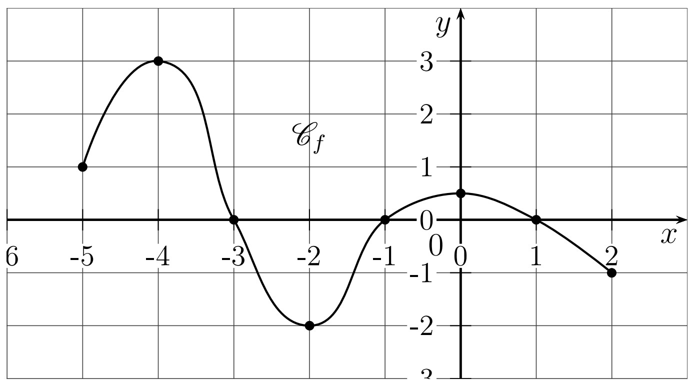
6. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
   (a) "Pour tout $x \in [-5;2]$, $f(x) \geqslant -3$."

   Vrai, car le minimum de f est -2 (et qu'un nombre plus grand que -2 est plus grand que -3 !).

   (b) "Il existe au moins un réel x dans l'intervalle $[-5;2]$ tel que $f(x) < x$."

   Vrai, par exemple $x = 2$ convient. En effet, $f(2) = -1 < 2$.

7. Tracer la courbe d'une fonction f compatible avec <u>toutes</u> les données de l'énoncé.
On n'oublie pas $f(-3) = f(-1) = f(1) = 0$.



Exercice 4 (3 points)
Déterminer les variations des fonctions affines suivantes, puis dresser leur tableau de signe.

1. $f(x) = 3 - 4(x-2) = -4x + 11$.
Variations.
Comme $a = -4 < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Signe.
$f(x) = 0$ ssi $-4x + 11 = 0$ ssi $x = \dfrac{11}{4}$.

x	$-\infty$		$11/4$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

2. $g(x) = \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}$.
Variations.
Comme $a = \dfrac{1}{4} > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Signe.
$g(x) = 0$ ssi $\dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2} = 0$ ssi $x = 2$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 5 (2 points)
f est une fonction affine telle que $f(1) \leqslant f(2)$, $f(3) \geqslant f(4)$, et $f(0) = 5$.
Déterminer l'expression de f. Justifier.
Comme f est une fonction affine, f est monotone sur $\mathbb{R}$.
Comme $f(1) \leqslant f(2)$, f est croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, comme $f(3) \geqslant f(4)$, f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Donc f est à la fois croissante et décroissante sur $\mathbb{R}$: f est une fonction constante.
Comme $f(0) = 5$, f est la fonction constante égale à 5.

$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = 5.}$