Correction du contrôle n° 3

Exercice 1 (6 points)

1. Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$ par $f(x)=\frac{1}{3x+1}$.

   (a) Donner un primitive de f sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

   Sur $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$, la fonction f est clairement continue et $u(x) = 3x+1>0$.
   $f(x)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{3x+1}=\frac{1}{3}\frac{u'(x)}{u(x)}$.

   $\boxed{\text{La fonction } F \text{ définie par } F(x)=\frac{1}{3}\ln(3x+1) \text{ est une primitive de } f \text{ sur cet intervalle.}}$

   (b) En déduire la primitive de f qui s'annule en 1.

   Les primitives de f sont de la forme $G(x)=\frac{1}{3}\ln(3x+1)+k$, avec $k\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} G(1) &= 0\\ \frac{1}{3}\ln(3\times 1+1)+k &= 0\\ k &= -\frac{\ln 4}{3}\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{La primitive de } f \text{ qui s'annule en 1 a pour expression } G(x)=\frac{1}{3}\ln(3x+1)-\frac{\ln 4}{3}.}$

2. (a) Vérifier que la fonction F définie par $F(x)=x\ln x - x$ est une primitive de la fonction ln sur $]0;+\infty[$.

   Les fonctions $x\mapsto x$ et ln sont dérivables sur $]0;+\infty[$.
   Par produit et somme, F est dérivable sur $]0;+\infty[$.
   Soit $x>0$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1\ln x + x\times\frac{1}{x}-1\\ &= \ln x\end{aligned}$$

   $\boxed{F \text{ est une primitive de la fonction ln sur }]0;+\infty[.}$

   (b) En déduire la valeur exacte de $\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)\,\mathrm{d}x &= F(\mathrm{e})-F(1)\\ &= (\mathrm{e}\ln(\mathrm{e})-\mathrm{e})-(1\ln(1)-1)\\ &= (\mathrm{e}-\mathrm{e})-(0-1)\\ &= 1\end{aligned}$$

3. Soit f la fonction définie sur $[1;2]$ par $f(x)=\frac{1}{x^3}$. Déterminer la valeur moyenne de f sur $[1;2]$.

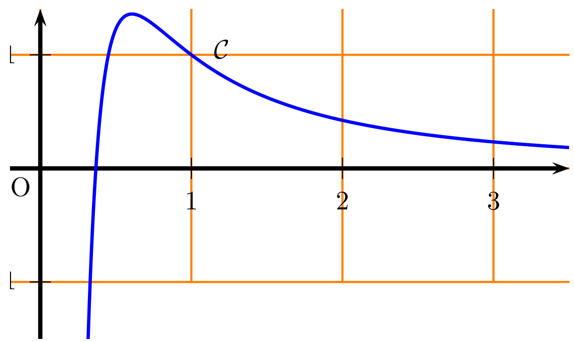
$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2-1}\int_1^2\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_1^2\\ &= -\frac{1}{2\times 2^2}+\frac{1}{2\times 1^2}\\ &= -\frac{1}{8}+\frac{4}{8}\\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

Exercice 2 (14 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous :



1. (a) Étudions la limite de f en 0.
On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} 1+\ln(x) = -\infty$.
D'autre part $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, alors par produit des limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

(b) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$,
D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, alors par produit des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$,
On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, et en ajoutant ces deux dernières limites, on obtient :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ prouve que l'axe des ordonnées ($x = 0$) est asymptote verticale.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ que l'axe des abscisses ($y = 0$) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x}\times x^2 - (1+\ln x)\times 2x}{x^4} = \dfrac{-x-2x\ln x}{x^4} = \dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

(b) $-1-2\ln x > 0 \iff \ln x < -\dfrac{1}{2} \iff x < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.
Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $x^3 > 0$ et $f'(x)$ est du signe de $-1-2\ln(x)$.

(c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.
On a $f\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{-1}} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{\mathrm{e}}{2}$	$\searrow$	0

3. (a) On a : $f(x) = 0 \iff 1+\ln x = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = \mathrm{e}^{-1}$
Ce qui prouve que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, le point de coordonnées $(\mathrm{e}^{-1}; 0)$

(b) D'après le tableau des variations de f et sachant que $f(\mathrm{e}^{-1}) = 0$.
On en déduit que $f(x) > 0$ sur l'intervalle $]\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty[$ et $f(x) < 0$ sur l'intervalle $]0;\ \mathrm{e}^{-1}[$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$.

(a) On sait que $f > 0$ sur $]\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty[$, donc $I_n = \displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$
Sur $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\,2\right]$ on a au vu des variations de f : $0 < f(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.
Comme l'intégration conserve l'ordre et le signe, on en déduit :
$0 \leqslant I_2 \leqslant \displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{2} \dfrac{\mathrm{e}}{2}dx = \dfrac{\mathrm{e}}{2}\left(2-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \mathrm{e}-\dfrac{1}{2}$ et finalement : $0 \leqslant I_2 \leqslant \mathrm{e}-\dfrac{1}{2}$.

(b) On dérive la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{-2-\ln(x)}{x}$.
$F'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}\times x - (-2-\ln x)\times 1}{x^2} = \dfrac{-1+2+\ln x}{x^2} = \dfrac{1+\ln x}{x^2} = f(x)$.
F est bien une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

(c) Calculons I_n en fonction de n. On a :
$I_n = \left[\dfrac{-2-\ln x}{x}\right]_{\mathrm{e}^{-1}}^{n} = \dfrac{-2-\ln n}{n} - \left(\dfrac{-2-\ln(\mathrm{e}^{-1})}{\mathrm{e}^{-1}}\right) = \dfrac{-2-\ln n}{n} - (-2+1)\mathrm{e}$
Et finalement : $I_n = \dfrac{-2-\ln n}{n} + \mathrm{e} = \mathrm{e} - \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{2}{n}$

(d) Étudions la limite de I_n en $+\infty$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \mathrm{e}$.
Graphiquement cela signifie que l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$.