Nom : Vendredi 22/03/2024
Prénom :

1G. Contrôle n° 8

Exercice 1 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 45n - 1 + \sqrt{n}.$$

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - u_n = 45 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$
2. En déduire que (u_n) est croissante.
3. On admet que (u_n) diverge vers $+\infty$.
   (a) Compléter la fonction Python qui détermine le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^4$.
```
from math import sqrt
def seuil():
    n=...
    while ...............:
        n=...
    return(...)
```
4. Peut-on affirmer que pour tout entier $n \geqslant 285$, $u_n \geqslant 10^4$? Justifier.

Exercice 2 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[-10; 10]$ par

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1.$$

1. (a) Calculer $f'(x)$, la dérivée de f.
   (b) Déterminer le tableau de variation de f sur $[-10; 10]$.
   (c) En déduire le meilleur encadrement de $f(x)$ lorsque x appartient à $[-10; 10]$.
2. Existe-t-il des points de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -9x + 2$? Dans l'affirmative, préciser les coordonnées de ces points.
3. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ de f au point d'abscisse 1.

Exercice 3 (5 points)

Le but de l'exercice est de démontrer que tous les rectangles d'aire égale à 100 ont un périmètre supérieur ou égal à 40.

1. On note $x > 0$ la mesure d'un côté d'un rectangle d'aire 100. Quelle est l'autre dimension du rectangle ?
2. Montrer que le périmètre du rectangle est
$$P(x) = 2x + \frac{200}{x}.$$
3. Calculer $P'(x)$ pour tout $x > 0$.
4. Déterminer le tableau de variation de P sur $]0; +\infty[$.
5. Que peut-on conclure ?

Exercice 4 (4 points + 1 bonus)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On lâche une balle d'une hauteur de 2 m.
   On admet que la hauteur de chaque rebond diminue de 38 % par rapport au précédent.
   On pose $u_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 1$ on note u_n la hauteur du $n^{\text{ième}}$ rebond.
   (a) Vérifier que $u_1 = 1,24$.
   (b) Écrire une fonction Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.
   (c) On considère que la balle devient immobile dès que la hauteur du rebond devient inférieure à 1 mm. Combien y a t-il eu de rebonds ? Justifier.
2. Bonus.
   On pose $V_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 3V_n + 5$.
   Écrire une fonction Python d'argument n (n entier naturel non nul) qui renvoie $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.