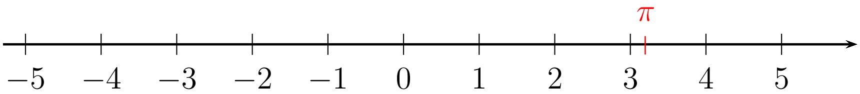
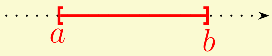
Chapitre 2 : Généralités sur les fonctions. Fonctions affines

I Intervalles de $\mathbb{R}$

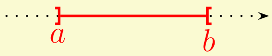
On peut représenter l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par une droite graduée.
À chaque nombre réel correspond un unique point sur la droite, et réciproquement à chaque point de la droite correspond un unique nombre réel, appelé abscisse de ce point.



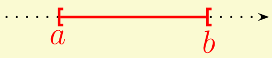
Définition (Intervalles bornés)
Soient a et b deux nombres réels, avec $a < b$.
L'intervalle fermé $[a;b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.



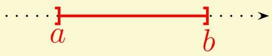
L'intervalle ouvert $]a;b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$.



L'intervalle $[a;b[$ (fermé en a, ouvert en b) est l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$.

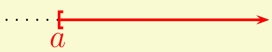


L'intervalle $]a;b]$ (ouvert en a, fermé en b) est l'ensemble des réels x tels que $a < x \leqslant b$.

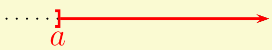


Remarque
Le symbole mathématique pour l'infini est ∞.

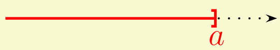
Définition (Intervalles non bornés)
Soit $a \in \mathbb{R}$.
L'intervalle fermé $[a;+\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $x \geqslant a$.



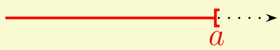
L'intervalle ouvert $]a;+\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $x > a$.



L'intervalle fermé $]-\infty;a]$ est l'ensemble des réels x tels que $x \leqslant a$.

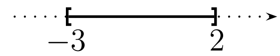
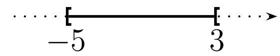
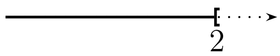
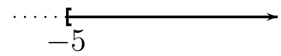


L'intervalle ouvert $]-\infty;a[$ est l'ensemble des réels x tels que $x < a$.

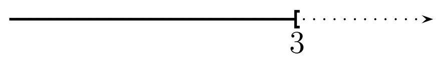


Remarque
On ouvre toujours les crochets pour $+\infty$ et $-\infty$.
$\mathbb{R}$ est un intervalle, il s'écrit $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

Exemple :

Inégalité	Intervalle	Représentation sur la droite graduée
$-3 \leqslant x \leqslant 2$	$[-3; 2]$	
$-5 \leqslant x < 3$	$[-5; 3[$	
$x < 2$	$]-\infty; 2[$	
$x \geqslant -5$	$[-5; +\infty[$	

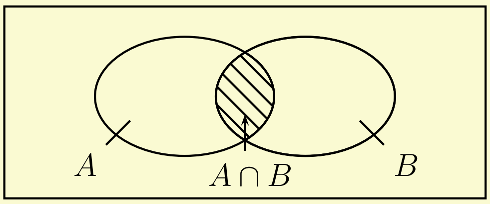
Exercice 1
Compléter le tableau

Inégalité	Intervalle	Représentation sur la droite graduée
	$]-1; 4]$	
$-4 < x < 7$		
		

I.1 Intersection et réunion de deux ensembles

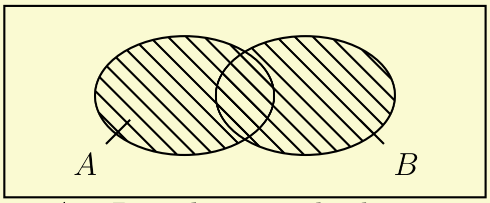
Définition

1. Intersection de deux ensembles.
   L'intersection de deux ensembles est l'ensemble des éléments communs aux deux ensembles.

   $$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \text{ et } x \in B)$$

2. Réunion de deux ensembles.
   La réunion de deux ensembles est l'ensemble des éléments appartenant à au moins l'un des deux ensembles.

   $A \cup B$ est la partie hachurée.

   $$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

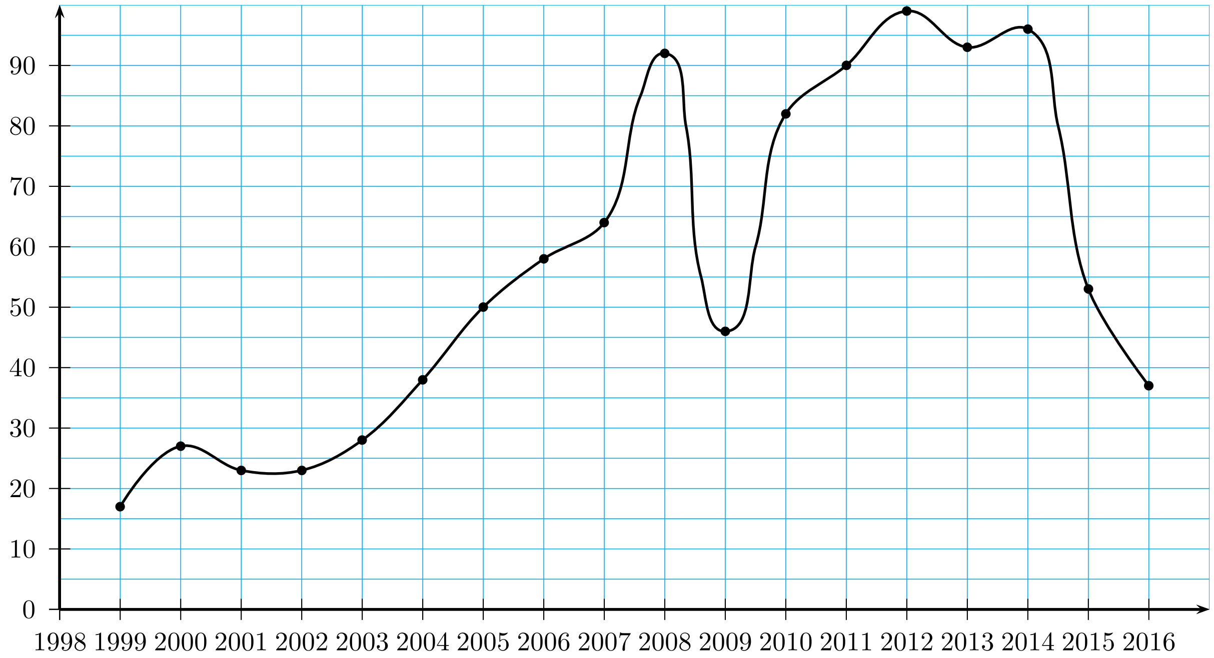
Remarque
Notations particulières :
On note $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls : $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
On note aussi $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ pour les réels positifs, et $\mathbb{R}_- =]-\infty; 0]$ pour les réels négatifs.

Exercice 2
Dans chaque cas, représenter I et J, puis simplifier, si possible, $I \cap J$ et $I \cup J$.

1. $I = [-2; 1]$ et $J =]0; 3[$.
2. $I = [1; 2]$ et $J = [-2, 5[$.
3. $I = [-1; 1]$ et $J = [4; 5]$.

II Notion de fonction

Le graphique suivant représente l'évolution du prix du baril de pétrole, exprimé en dollars, de début 1999 à début 2016.



1. Combien coûtait approximativement un baril de pétrole au début de l'année 1999 ? Et début 2011 ?

2. D'après le graphique, entre 1999 et 2016, combien de fois le baril de pétrole a-t-il coûté 60 dollars ?

3. D'après le graphique, entre 1999 et 2016, combien de fois le baril de pétrole a-t-il coûté 30 dollars ?

4. Quand le baril de pétrole a-t-il atteint son maximum entre 2002 et 2009 ? Quel était ce maximum ?

5. Comment a évolué le prix du baril de pétrole entre 2002 et 2008 ?

6. Parmi les deux phrases suivantes, une seule est vraie. Laquelle ?
   « À chaque date entre 1999 et 2016, il correspond un unique prix pour le baril de pétrole ».
   « À chaque valeur entre 18 et 99 dollars pour le prix du baril de pétrole, il correspond une unique date entre 1999 et 2016 ».

Vocabulaire :
Le graphique montre que lorsque l'année (le temps) varie, le prix du baril de pétrole évolue.
Le ______________________________ dépend du ____________________.
On dit que le temps est la ____________________.
Sur le graphique, on lit ses valeurs en ____________________.
Le prix du baril de pétrole est ____________________ du temps.
On lit ses valeurs en ____________________.

II.1 Définition

Définition
Soit D une partie de $\mathbb{R}$.
Définir une fonction f de D dans $\mathbb{R}$, c'est associer à tout nombre x appartenant à D un unique nombre réel $f(x)$.
Vocabulaire : On dit que

- x est la variable de f,
- D est l'ensemble de définition de f (souvent noté D_f),
- $f(x)$ est l'image de x par f.

On note parfois $f : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

Exemple :
Posons $f(x) = 2x^2 - 1$.
L'image de 0 par f est $f(0) = 2 \times 0^2 - 1 = -1$.
Pour calculer l'image d'une nombre par une fonction, on remplace x par ce nombre dans l'expression de f.

Définition
Soit f une fonction définie sur D. Soit y un nombre réel.
On appelle antécédent de y par f tout nombre x de D tel que $f(x) = y$.

Exemple :
Considérons la fonction carré, $f(x) = x^2$.

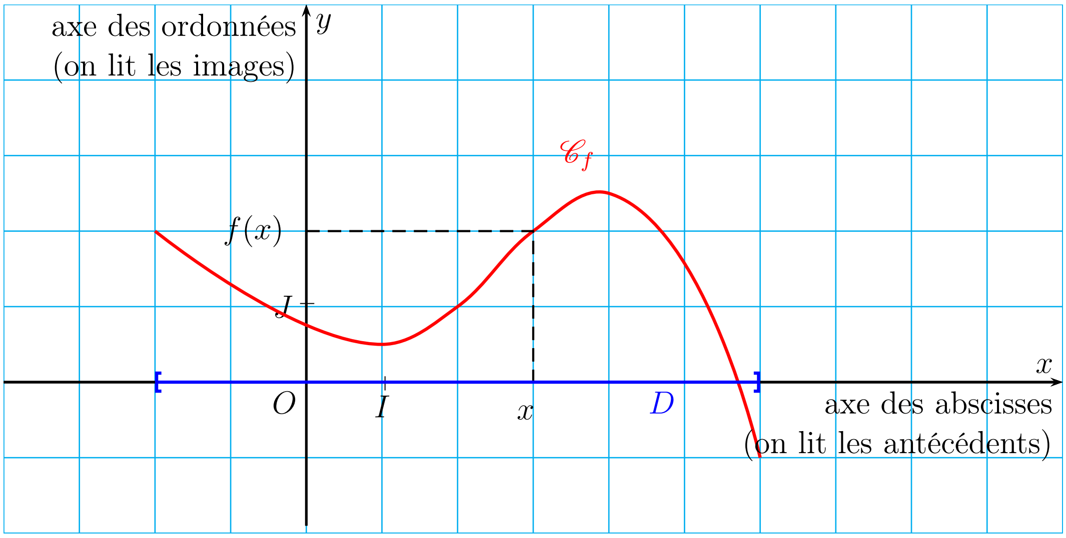
- On cherche les antécédents de 9 par f.
  Un antécédent de 9 est un nombre x tel que $f(x) = 9$.
  L'équation $x^2 = 9$ donne $x = 3$ ou $x = -3$.
  Ainsi, le nombre 9 a deux antécédents qui sont 3 et -3.
- Rechercher les antécédents de -2 par f.
  Ce sont les nombres x tels que $x^2 = -2$.
  Cette équation n'a pas de solution (un carré est toujours positif).
  Donc -2 n'a pas d'antécédent par f.

Remarque
Un nombre peut avoir 0 antécédent, ou un antécédent, ou plusieurs !
Par contre, tout nombre x de D admet une unique image $f(x)$.

II.2 Représentation graphique d'une fonction

Pour étudier une fonction f, il est intéressant de pouvoir lire à la fois le nombre x et son image $f(x)$.

Définition
Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Dans un repère du plan, la courbe représentative de f est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ avec $x \in D_f$.
Autrement dit, $M(x; y) \in \mathscr{C}_f$ si et seulement si $\big(x \in D$ et $y = f(x)\big)$.
On dit que $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.



Sur cet exemple, l'ensemble de définition de f est $D = [-2; 6]$.
On remarque que la courbe passe par le point $A(3; 2)$, donc $f(3) = 2$.

Remarque
Pour une valeur de la variable x donnée, il n'y a qu'une seule image $f(x)$. Par conséquent la courbe d'une fonction ne peut avoir qu'un point d'abscisse donnée.

Exercice 3 (calcul mental)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 4$.

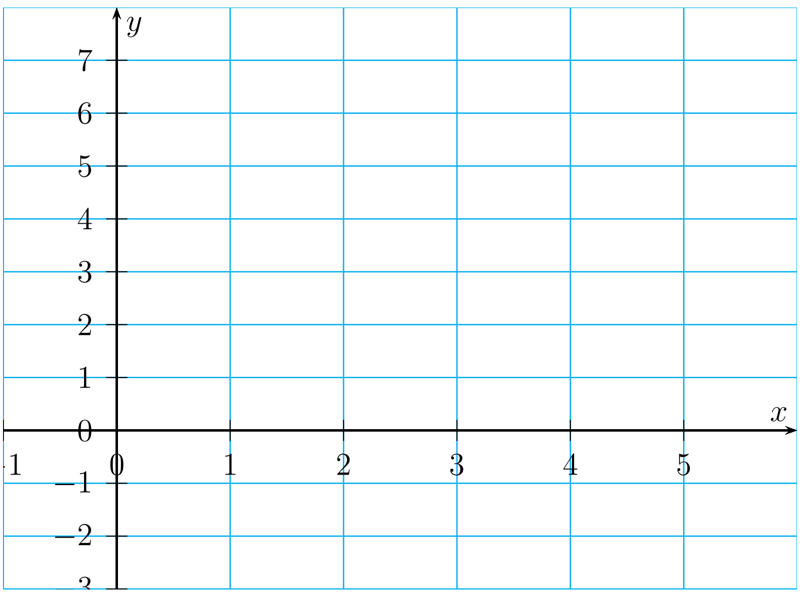
1. L'image de -1 est ....
   Donc le point de coordonnées $(\ldots; \ldots)$ appartient à la courbe de f.
2. $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ldots$.
3. 10 admet pour antécédent le réel ... car ...
4. La courbe représentative de f passe par $A(0; \ldots)$, $B(2; \ldots)$ et $C(\ldots; -8)$.

Exercice 4 (tableau de valeurs, tracé de courbe)
Soit f la fonction définie sur $[0; 5]$ par $f(x) = (x - 3)^2 - 2$.

1. Tableau de valeurs :
   Compléter le tableau.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$											

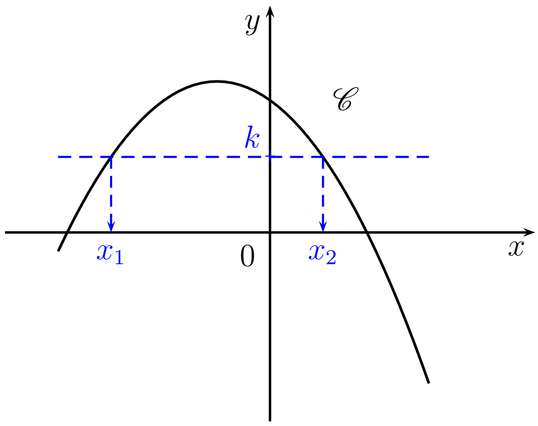
2. Dans un repère orthogonal, construire la courbe représentative de f sur $[0; 5]$.



III Résolutions graphiques d'équations

III.1 Équation $f(x) = k$

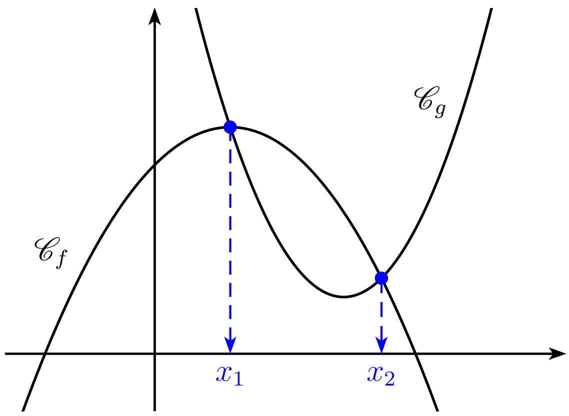
Propriété
Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Notons $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Soit k un nombre réel.
Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}$ qui ont une ordonnée égale à k.



Remarque
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ revient à déterminer graphiquement les antécédents de k par f.

III.2 Équation $f(x) = g(x)$

Propriété
Soient f et g deux fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Notons respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère du plan.
Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



IV Fonctions affines

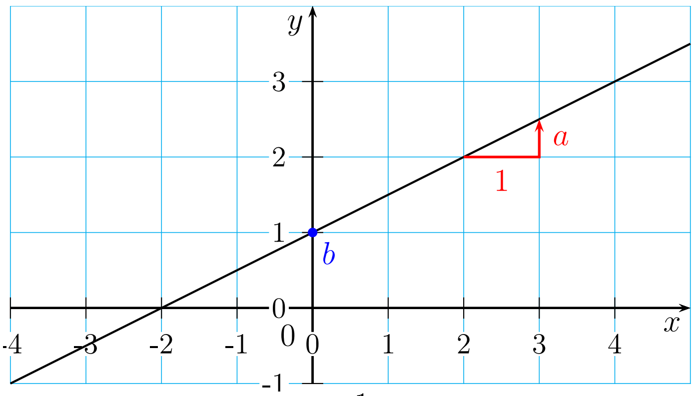
Définition
Une fonction f est affine s'il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout x réel $f(x) = ax + b$.
On peut toujours définir une fonction affine sur $\mathbb{R}$.

Exemple : la fonction f donnée par $f(x) = 2x + 3$.

Théorème (admis)
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Vocabulaire :
Soit f définie par $f(x) = ax + b$.

- Le réel a est le coefficient directeur de la droite représentant f.
  Il donne l'inclinaison de la droite : « quand on avance de 1, on "monte" de a ».
- le réel b est l'ordonnée à l'origine de la droite :
  La droite coupe l'axe des orconnées en le point de coordonnées $(0; b)$.



$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

Méthode pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine :
Comme c'est une droite, il suffit de construire deux points.

- On choisit deux valeurs de x, (qui donnent des calculs simples si possible)
- on calcule les images correspondantes,
- on place les points obtenus, et on trace la droite les reliant.

Exercice 5
Tracer la courbe de la fonction définie par $f(x) = -\frac{2}{5}x + 3$.

x	0	5
y	...	...

Remarque (cas particuliers)

- Lorsque $a = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = b$.
  La fonction est dite constante. La courbe de f est alors un droite parallèle à l'axe des abscisses.
- Lorsque $b = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.
  La fonction est dite linéaire. La courbe de f est une droite passant par O.

Propriété
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, avec a et b réels.
Pour tous nombres réels distincts u et v,

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = a.$$

Démonstration
Soient u et v deux réels distincts.
$\dfrac{f(v) - f(u)}{v - u} = \dfrac{av + b - (au + b)}{v - u} = \dfrac{av - au}{v - u} = \dfrac{a(v - u)}{v - u} = a.$ □

Remarque
De façon générale, le nombre $\dfrac{f(v) - f(u)}{v - u}$ est le taux d'accroissement de la fonction f entre les réels u et v.
Pour une fonction affine, le taux d'accroissement est constant et toujours égal au coefficient directeur a.

Théorème (admis, variation des fonctions affines)
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, avec a et b réels.

1. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ssi $a > 0$.
2. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ ssi $a < 0$.
3. f est constante sur $\mathbb{R}$ ssi $a = 0$.
   Dans ce cas, $\mathscr{C}_f$ est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Méthode pour déterminer l'expression d'une fonction affine f dont on connaît la représentation graphique :

— Repérer deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sur $\mathscr{C}_f$.
— Le coefficient directeur est $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
— Alors, $f(x) = ax + b$, et a est connu. On trouve b en remplaçant les coordonnées d'un des points A ou B dans la relation précédente.

Exercice 6
Dans chaque cas, déterminer l'expression de la fonction affine f.

1. $f(2) = 5$ et $f(3) = 1$.
2. La courbe de f passe par $A(-2; 3)$ et $B(1; 4)$.

Propriété (équation du premier degré)
Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$.

$$ax + b = 0 \text{ ssi } x = -\frac{b}{a}.$$

Démonstration
On suppose que $a \neq 0$.
$ax + b = 0$ ssi $ax + b - b = 0 - b$ ssi $ax = -b$ ssi $\dfrac{ax}{a} = -\dfrac{b}{a}$ ssi $x = -\dfrac{b}{a}$. □