2de. Correction du devoir maison n° 4

Exercice 1

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(4;2)$, $B(6;-4)$ et $C(0;-2)$.

1. Faire une figure, que l'on complètera.
2. Justifier que le triangle ABC est isocèle en B.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} & BC &= \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} \\ &= \sqrt{2^2+(-6)^2} & &= \sqrt{(-6)^2+(2)^2} \\ &= \sqrt{4+36} & &= \sqrt{36+4} \\ &= \sqrt{40} & &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} & &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

Donc $AB = BC$, le triangle ABC est bien isocèle en B.

3. On note E le milieu de $[AC]$. Calculer les coordonnées de E.

$x_E = \dfrac{x_A+x_C}{2} = \dfrac{4+0}{2} = 2.$

$y_E = \dfrac{y_A+y_C}{2} = \dfrac{2-2}{2} = 0.$

D'où $E(2;0)$.

4. Soit D le point de coordonnées $(-2;4)$. Justifier que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

Notons M le milieu de $[BD]$.

$x_M = \dfrac{x_B+x_D}{2} = \dfrac{6-2}{2} = 2.$

$y_M = \dfrac{y_B+y_D}{2} = \dfrac{-4+4}{2} = 0.$

D'où $M(2;0)$. Les points E et M sont confondus.
Comme ses diagonales ont le même milieu, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
De plus, on a vu que $BA = BC$.

Comme le parallélogramme $ABCD$ a deux côtés adjacents de même longueur, c'est un losange.

5. Déterminer les coordonnées du symétrique K de B par rapport à C.
Cela signifie que C est le milieu de $[BK]$.

$$\begin{aligned} \frac{x_K+x_B}{2} &= x_C & \frac{y_K+y_B}{2} &= y_C \\ \frac{x_K+6}{2} &= 0 & \frac{y_K-4}{2} &= -2 \\ x_K+6 &= 2\times 0 & y_K-4 &= 2\times(-2) \\ x_K &= -6 & y_K &= 0 \end{aligned}$$

D'où $K(-6;0)$.

6. Justifier que $ADKC$ est un parallélogramme.
Comme $ABCD$ est un parallélogramme, $(AD)//(BC)$.
Autrement dit, $(AD)//(KC)$.
Comme C est le milieu de $[KB]$, $KC = BC$.
Or, $AD = BC$ car $ABCD$ est un parallélogramme.
D'où $AD = KC$.
Dans le quadrilatère $ADKC$ (non croisé), on a donc deux côtés opposés parallèles et de même longueur : $[AD]$ et $[KC]$.

Donc $ADKC$ est un parallélogramme.

7. (a) Quelle est la nature du triangle ABE ? Justifier.
Comme $ABCD$ est un losange, ses diagonales sont perpendiculaires.
Donc $(EA) \perp (EB)$.

Le triangle ABE est rectangle en E.

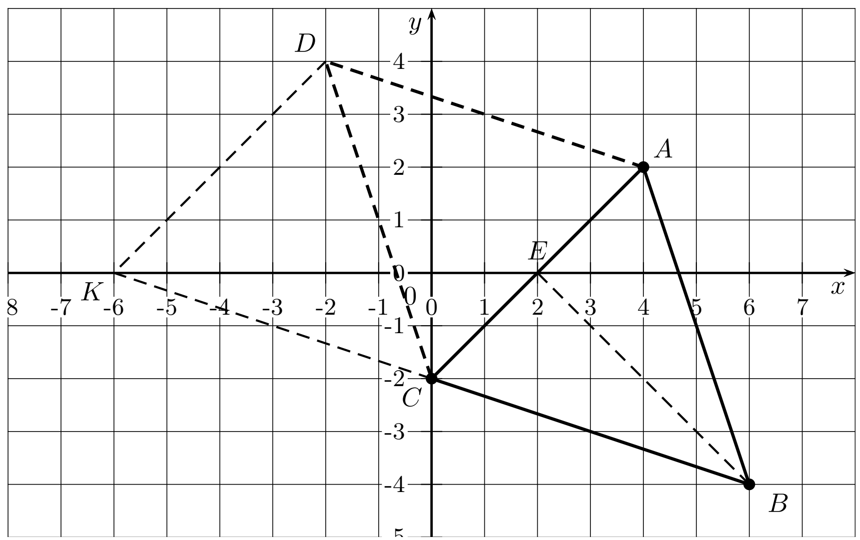
(b) Calculer l'aire du triangle ABE.

$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{(x_E-x_A)^2+(y_E-y_A)^2} & BE &= \sqrt{(x_E-x_B)^2+(y_E-y_B)^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} & &= \sqrt{(-4)^2+4^2} \\ &= \sqrt{4+4} & &= \sqrt{32} \\ &= \sqrt{8} & &= 4\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Comme le triangle ABE est rectangle en E,

$$\mathcal{A}(ABE) = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{EA \times EB}{2} = \frac{2\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}}{2} = 2\times 4 = 8$$

L'aire du triangle ABE est 8 (unités d'aire).



Exercice 2

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-2;0)$, $B(-1;3)$, et $C(4;-2)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-1+2)^2 + (3-0)^2} \\ &= \sqrt{1+9} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(4+2)^2 + (-2-0)^2} \\ &= \sqrt{36+4} \\ &= \sqrt{40} \text{ (ou encore } 2\sqrt{10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(4+1)^2 + (-2-3)^2} \\ &= \sqrt{25+25} \\ &= \sqrt{50} \text{ (ou encore } 5\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Donc $BC^2 = 50$.
Par ailleurs, $AB^2 + AC^2 = 10 + 40 = 50$. Donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

2. Soit $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit. On note K son centre.

(a) Déterminer les coordonnées de K et le rayon de $\mathscr{C}$.
Comme ABC est rectangle en A, le centre de son cercle circonscrit est le mileu de l'hypoténuse $[BC]$. Donc K est le mileu de $[BC]$.

$x_K = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{-1+4}{2} = 1,5.$

$y_K = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{3-2}{2} = 0,5.$

Donc $K(1,5;0,5)$.

Comme K est le milieu de $[BC]$, le rayon de $\mathscr{C}$ est la moitié de BC.

$$\boxed{r = KB = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.}$$

(b) Préciser la position des points $D(4;3)$ et $F(3,5;3,5)$ par rapport à $\mathscr{C}$.

$KD = \sqrt{(x_D - x_K)^2 + (y_D - y_K)^2} = \sqrt{(4-1,5)^2 + (3-0,5)^2}$

$KD = \sqrt{6,25+6,25} = \sqrt{12,5} = \sqrt{\dfrac{25}{2}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} = r$

Comme $KD = r$, $D \in \mathscr{C}$.

$$\begin{aligned} KF &= \sqrt{(x_F - x_K)^2 + (y_F - y_K)^2} \\ &= \sqrt{(3,5-1,5)^2 + (3,5-0,5)^2} \\ &= \sqrt{4+9} \\ &= \sqrt{13} > r \text{ car } r = \sqrt{12,5} \end{aligned}$$

Comme $KF > r$, $F \notin \mathscr{C}$ (F est à l'extérieur du disque).

(c) Montrer que la droite (DF) est tangente à $\mathscr{C}$.
On sait que $D \in \mathscr{C}$.
Pour montrer que la droite (DF) est tangente à $\mathscr{C}$, il suffit de montrer que $(DF) \perp (DK)$.

$$\begin{aligned} DF &= \sqrt{(x_F - x_D)^2 + (y_F - y_D)^2} \\ &= \sqrt{(-0,5)^2 + (0,5)^2} \\ &= \sqrt{0,25+0,25} \\ &= \sqrt{0,5} \end{aligned}$$

Comme $KF^2 = 13$, et $KD^2 + DF^2 = 12,5 + 0,5 = 13$, on a bien $KF^2 = KD^2 + DF^2$.
Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle KDF est rectangle en D.
Autrement dit, $(DF) \perp (DK)$.

Donc la droite (DF) est tangente à $\mathscr{C}$.