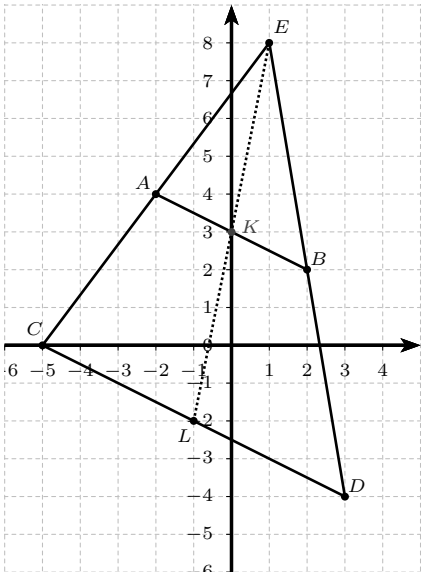
Interrogation de mathématiques n° 2
Réponses du sujet 1

Exercice 1 (5 points)
Compléter sur l'énoncé. Aucune justification n'est attendue.

1. La droite d'équation $2x - 5y + 1 = 0$ passe par le point $E(7; 3)$.
2. La droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x + 5$ admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$.
3. On donne $A(6; -1)$, et $B(2; 3)$.
   (a) Le coefficient directeur de la droite (AB) est -1.
   (b) La droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par A a pour équation réduite $x = 6$.
4. La droite parallèle à la droite d'équation $5x - y + 2 = 0$ et passant ar $F(0; -4)$ a pour équation $y = 5x - 4$.

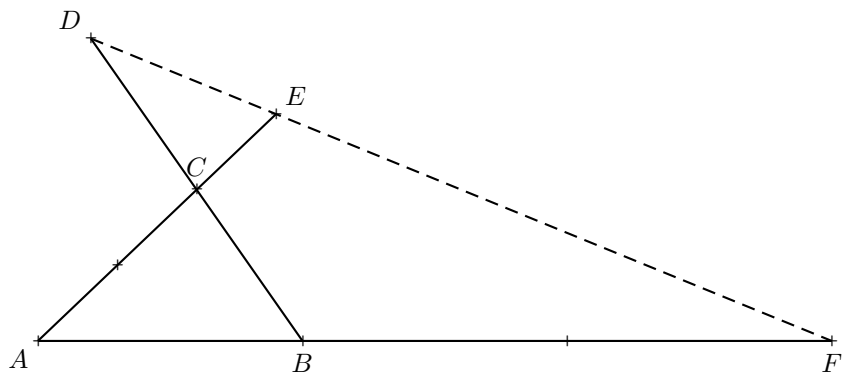
Exercice 2 (9 points)
Le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$.
On considère les points $A(-2; 4)$, $B(2; 2)$, $C(-5; 0)$ et le point D tel que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.

1. (a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier votre réponse.
   $(AB)//(CD)$ et $ABDC$ n'est pas croisé. $ABDC$ est un trapèze.
   (b) Calculer les coordonnées du point D.
   $D(3; -4)$.
2. (a) Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $6x + y - 14 = 0$.
   Vérifier que B et D appartiennent à $\mathcal{D}$.
   (b) Déterminer une équation de la droite (AC) .
   $(AC) : -4x + 3y - 20 = 0$.
   (c) Montrer que (AC) et (BD) sont sécantes.
   Elles n'ont pas le même coefficient directeur : $\dfrac{4}{3} \neq -6$.
   (d) Calculer les coordonnées du point d'intersection E de (AC) et (BD).
   $E(1; 8)$.
3. (a) Calculer les coordonnées du point K, milieu de $[AB]$ et du point L, milieu de $[CD]$.
   $K(0; 3)$, et $L(-1; -2)$.
   (b) Montrer que les points E, K et L sont alignés.
   $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix} -2 \\ -10 \end{pmatrix}$.
   Donc $\overrightarrow{EL} = 2\overrightarrow{EK}$, les vecteurs $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires, donc E, K, L sont alignés, et K est le milieu de $[EL]$.



Exercice 3 (5 points)
Soit ABC un triangle. Les points D, E, et F sont définis par :
$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{BA}$.

1. Faire une figure.



2. Exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} \\
&= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

3. Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} \\
&= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \\
&= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BA} \\
&= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} \\
&= 3\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

4. En déduire que D, E, et F sont alignés.
   $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
   $\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$
   Il est clair que $\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{DE}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont donc colinéaires.
   On en conclut que les points D, E, et F sont alignés.
5. Question bonus : (2 points)
   Soit m un nombre réel et L le point défini tel que $\overrightarrow{AL} = m\overrightarrow{AD}$.
   Déterminer la valeur m pour que les points L, C et F soient alignés.
   On exprime $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CL}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   $\overrightarrow{AL} = m\overrightarrow{AD} = m(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) = m(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) = m(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = -m\overrightarrow{Ab} + 2m\overrightarrow{AC}$.
   Donc $\overrightarrow{CL} = -m\overrightarrow{AB} + (2m-1)\overrightarrow{AC}$.
   $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
   Donc $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CL}$ sont colinéaires ssi $-m) \times (-1) - 3(2m-1) = 0$, soit $m = \frac{3}{5}$.

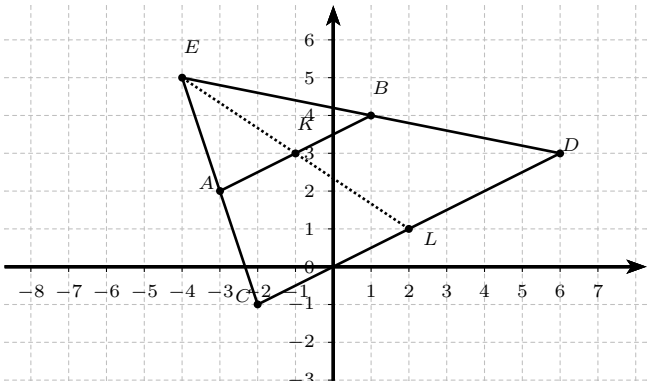
Interrogation de mathématiques n° 2
Réponses du sujet 2

Exercice 4 (5 points)
Compléter sur l'énoncé. Aucune justification n'est attendue.

1. La droite d'équation $x + 6y + 1 = 0$ passe par le point $E(5; -1)$.
2. La droite d'équation $6x - 11y + 3 = 0$ admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$.
3. On donne $A(3; 2)$, et $B(1; 4)$.
   (a) Le coefficient directeur de la droite (AB) est $0,5$.
   (b) La droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par A a pour équation réduite $y = 2$.
4. La droite parallèle à la droite d'équation $y = -x+2$ et passant par $F(0; -4)$ a pour équation $y = -x-4$.

Exercice 5 (9 points)
Le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$.
On considère les points $A(-3; 2)$, $B(1; 4)$, $C(-2; -1)$ et le point D tel que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.

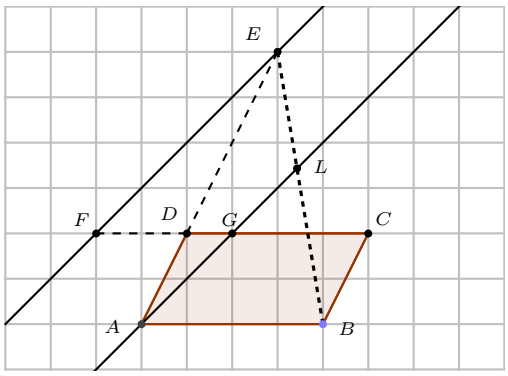
1. (a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier votre réponse.
   $(AB)//(CD)$ et $ABDC$ n'est pas croisé. $ABDC$ est un trapèze.
   (b) Calculer les coordonnées du point D.
   $D(6; 3)$.
2. (a) Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x + 5y - 21 = 0$.
   Vérifier que B et D appartiennent à $\mathcal{D}$.
   (b) Déterminer une équation de la droite (AC) .
   $(AC) : 3x + y + 7 = 0$.
   (c) Montrer que (AC) et (BD) sont sécantes.
   Elles n'ont pas le même coefficient directeur : $-\dfrac{1}{5} \neq -3$.
   (d) Calculer les coordonnées du point d'intersection E de (AC) et (BD).
   $E(-4; 5)$.
3. (a) Calculer les coordonnées du point K, milieu de $[AB]$ et du point L, milieu de $[CD]$.
   $K(-1; 3)$, et $L(2; 1)$.
   (b) Montrer que les points E, K et L sont alignés.
   $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.
   Donc $\overrightarrow{EL} = 2\overrightarrow{EK}$, les vecteurs $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires, donc E, K, L sont alignés, et K est le milieu de $[EL]$.



Exercice 6
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Les points E, F et G sont définis par :

$$\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD},\ \text{et}\ \overrightarrow{DG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}.$$

1. Figure



2.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FE} &= \overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}\\ &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AD}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AD}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

En effet, $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$ car $ABCD$ est un parallélogramme.

3.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}\\ &= \overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\\ &= \overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

De même, comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$.

4. On remarque que $\overrightarrow{FE}=2\overrightarrow{AG}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires, donc $(AG)//(FE)$.
5. Question bonus :
   Les points E, L et B sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont colinéaires.
   On va exprimer ces deux vecteurs en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EL} &= \overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AL}\\ &= \overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}+m\overrightarrow{AG}\\ &= -2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}+m\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\\ &= \frac{m}{4}\overrightarrow{AB}+(m-3)\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EB} &= \overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

   On rappelle $\overrightarrow{EL}=\frac{m}{4}\overrightarrow{AB}+(m-3)\overrightarrow{AD}$.
   D'après ces décompositions, les vecteurs $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{EL}=\frac{m}{4}\overrightarrow{EB}$, ce qui revient à

$$\begin{aligned}-3\times\frac{m}{4} &= m-3\\ -3m &= 4m-12\\ 7m &= 12\\ m &= \frac{12}{7}\end{aligned}$$

   Conclusion : Les points E, L et B sont alignés si et seulement si $m=\frac{12}{7}$, soit $\overrightarrow{AL}=\frac{12}{7}\overrightarrow{AG}$.