

NOM :
Prénom :

Mardi 19/12/2023

1re G. Devoir de mathématiques n° 5

Sujet 1

Exercice 1 (cours, 1 point)

Compléter sur l'énoncé. Opérations sur les dérivées.

Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I , soit $k \in \mathbb{R}$.

Alors

1. $(k \times u)$ est dérivable sur I et $(k \times u)' =$
2. Si v ne s'annule pas sur I , alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' =$

Exercice 2 (3 points)

Pour chacune des fonctions f , donner l'expression de la dérivée $f'(x)$, et en déduire le nombre dérivé $f'(a)$ pour la valeur de a demandée.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, et $a = -2$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 7$, et $a = -1$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -5$, et $a = 9$.
4. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x^4}$, et $a = 1$.

Exercice 3 (2 points)

1. En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que la fonction f définie sur $]5; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x-5}$ est dérivable en 8, et que $f'(8) = -\frac{1}{3}$.
2. À l'aide des opérations sur les dérivées, calculer $f'(x)$ pour tout $x > 5$, et retrouver la valeur de $f'(8)$.

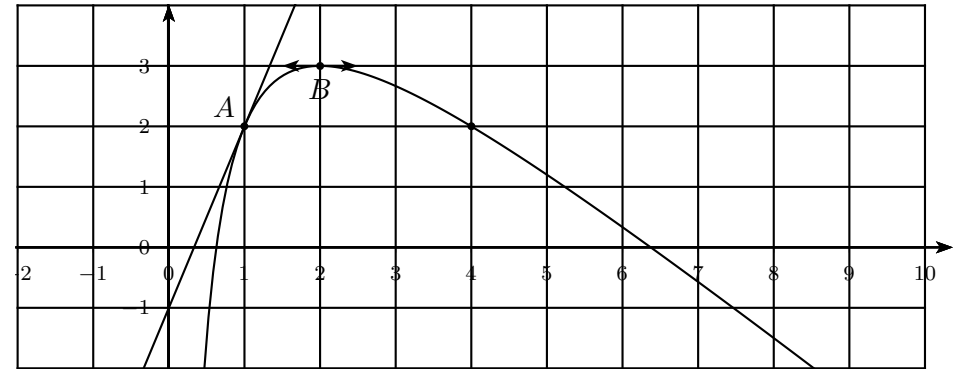
Exercice 4 (3 points)

Calculer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.
2. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$.
3. f est définie sur $] - \infty; 3[$ par $f(x) = \sqrt{6 - 2x}$.

Exercice 5 (2,5 points)

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. On a tracé les tangentes à la courbe de f aux points A et B .



1. Lire graphiquement $f(1)$ et $f(2)$.
2. Déterminer $f'(1)$ et $f'(2)$ à l'aide du graphique. Justifier.
3. On admet que $f'(4) = -\frac{3}{4}$. Tracer la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4. Aucune justification n'est attendue.

Exercice 6 (1,5 point)

La tangente à la courbe de la fonction cube ($f(x) = x^3$) au point d'abscisse 1 passe-t-elle par le point $E(4; 11)$? Justifier.

Exercice 7 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $] - \infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x-7}{2x-2}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{6}{(2x-2)^2}$.
2. Montrer qu'il existe deux points de $\mathcal{C}$ où la tangente à la courbe est parallèle à la droite d'équation $y = 0,5x + 8$. Donner les abscisses de ces deux points (on ne demande pas leurs ordonnées).
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 2.
4. Montrer que pour tout réel $x \neq 1$,
$$f(x) - \left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\right) = \frac{-3(x-2)^2}{2(x-1)}.$$
5. Bonus : En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la tangente T .

NOM :
Prénom :

/12/2023

1re G. Devoir de mathématiques n° 5
Sujet 2

Exercice 8 (cours, 1 point)

Compléter sur l'énoncé. Opérations sur les dérivées.

Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I , soit $k \in \mathbb{R}$. Alors

1. $(u \times v)$ est dérivable sur I et $(u \times v)' =$
2. Si v ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et
$$\left(\frac{1}{v}\right)' =$$

Exercice 9 (3 points)

Pour chacune des fonctions f , donner l'expression de la dérivée $f'(x)$, et en déduire le nombre dérivé $f'(a)$ pour la valeur de a demandée.

1. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$, et $a = -2$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 7$, et $a = -1$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}$, et $a = 11$.
4. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x^3}$, et $a = 1$.

Exercice 10 (2 points)

1. En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que la fonction f définie sur $] -\infty; 1[$ par $f(x) = \frac{2}{x-1}$ est dérivable en -1 , et que $f'(-1) = -\frac{1}{2}$.
2. À l'aide des opérations sur les dérivées, calculer $f'(x)$ pour tout $x < 1$, et retrouver la valeur de $f'(-1)$.

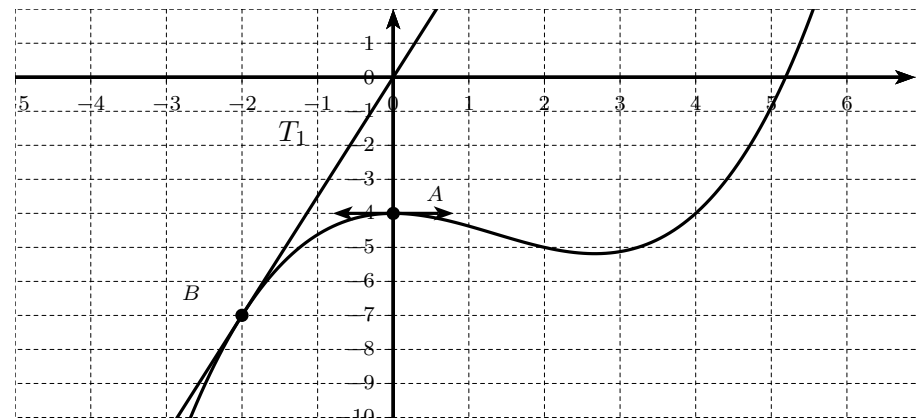
Exercice 11 (3 points)

Calculer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^5 + 8x^3 + 2x - 4$.
2. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (3 - 2x)\sqrt{x}$.
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x - 6)^3$.

Exercice 12 (2,5 points)

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a tracé les tangentes à la courbe de f aux points A et B .



1. Lire graphiquement $f(-2)$ et $f(0)$ sans justification.
2. Déterminer graphiquement $f'(-2)$ et $f'(0)$. Justifier.
3. On admet que $f'(4) = 2$. Tracer la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4. Aucune justification n'est attendue.

Exercice 13 (1,5 point)

La tangente à la courbe de la fonction cube ($f(x) = x^3$) au point d'abscisse 1 passe-t-elle par le point $E(4; 11)$? Justifier.

Exercice 14 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; -3[\cup] -3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x-1}{2x+6}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout $x \neq -3$, $f'(x) = \frac{20}{(2x+6)^2}$.
2. Montrer qu'il existe deux points de $\mathcal{C}$ où la tangente à la courbe est parallèle à la droite d'équation $y = x + 8$. Donner les abscisses de ces deux points (on ne demande pas leurs ordonnées).
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse -1 .
4. Montrer que pour tout réel $x \neq -3$,
$$f(x) - \left(\frac{5}{4}x + \frac{1}{4}\right) = \frac{-5(x+1)^2}{4(x+3)}.$$
5. Bonus. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la tangente T .