1G. Correction du dm4

Exercice 1

Dans un club sportif, chaque membre ne pratique qu'un seul sport. La répartition est donnée par le tableau suivant.

	Boxe	Tennis	Gymnastique	Total
Femmes	60	230	160	450
Hommes	160	310	80	550
Total	220	540	240	1 000

On choisit au hasard un membre du club, chaque membre a la même probabilité d'être choisi. On note

— F : "la personne choisie est une femme",

— T : "la personne choisie joue au tennis".

Les événements F et T sont-ils indépendants ? Justifier.

F et T sont indépendants ssi $P(F) = P_T(F)$.

$P(F) = \dfrac{450}{1000} = 0,45$, et $P_T(F) = \dfrac{230}{540} = \dfrac{23}{54} \approx 0,426$.

$\boxed{\text{Comme } P(F) \neq P_T(F),\ F \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendants.}}$

Exercice 2

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,80]$.

Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.

Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12 + 0,004x$.

   On pose

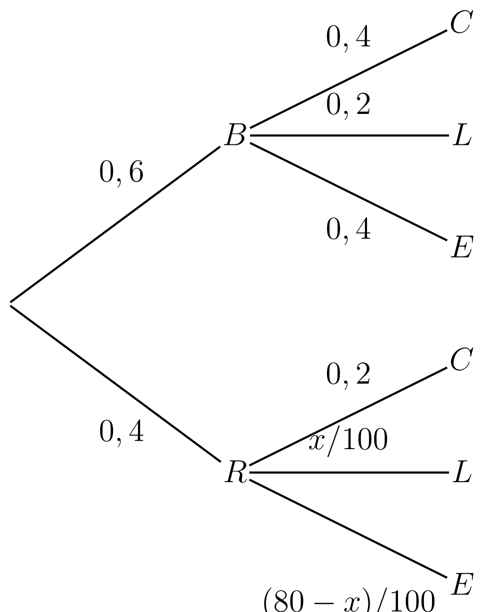
   B : "le cube est bleu",

   R : "le cube est rouge",

   C : "le cube a ses faces marquées d'un cercle",

   L : "le cube a ses faces marqués d'un losange",

   E : "le cube a ses faces marquées d'une étoile".



En effet, $P_R(E) = 1 - \left(0,2 + \dfrac{x}{100}\right) = \dfrac{100 - 20 - x}{100} = \dfrac{80 - x}{100}$.

B et R forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales,
$P(L) = P(B \cap L) + P(R \cap L) = 0, \times 0,2 + 0,4 \times 0,01x = 0,12 + 0,004x$.

2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
De même, via les probabilités totales, on a
$P(E) = 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,01(80 - x) = 0,24 + 0,32 - 0,004x = 0,56 - 0,004x$.
Ainsi, $P(E) = P(L)$ ssi $0,12 + 0,004x = 0,56 - 0,004x$
ssi $0,008x = 0,44$, ssi $x = 55$.

La probabilité de tirer un cube marqué d'un losange est égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile pour $x = 55$.

3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.
B et L sont indépendants ssi $P_B(L) = P(L)$ ssi $0,2 = 0,12 + 0,004x$
ssi $0,004x = 0,08$ ssi $x = 20$.

B et L sont indépendants lorsque $x = 20$.

4. On suppose dans cette question que $x = 50$.
Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.
$P_L(B) = \dfrac{P(L \cap B)}{P(L)} = \dfrac{0,6 \times 0,2}{0,12 + 0,004 \times 50} = \dfrac{0,12}{0,32} = 0,375$.

Avec $x = 50$, la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange est donc $0,375$.

Exercice 3

1. En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que la fonction f définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ est dérivable en 5, et déterminer $f'(5)$.
Soit $h \neq 0$.
$\dfrac{f(5+h) - f(5)}{h} = \dfrac{1}{h} \times \left(\dfrac{3}{5+h-2} - 1\right) = \dfrac{3-(h+3)}{h(h+3)} = \dfrac{-h}{h(h+3)} = \dfrac{-1}{h+3}$.
Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h} = -\dfrac{1}{3}$.

Donc f est dérivable en 5 et $f'(5) = -\dfrac{1}{3}$.

2. En déduire une équation de la tangente T_5 à la courbe de f au point d'abscisse 5 (on ne demande pas de tracer la courbe ni la tangente).
$y = f'(5)(x-5) + f(5)$ ssi $y = -\dfrac{1}{3}(x-5) + 1$ ssi $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3}$.

T_5 a pour équation réduite $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3}$.

Exercice 4

La tangente à la courbe de la fonction carré au point A d'abscisse -3 passe-t-elle par le point $K(-2; 3)$? Justifier.
On note f la fonction carré. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.
Soit T la tangente au point d'abscisse -3.
Elle a pour équation $y = f'(-3)(x - (-3)) + f(-3)$.
Or, $f(-3) = (-3)^2 = 9$, et comme $f'(x) = 2x$, $f'(-3) = 2 \times (-3) = -6$.
Ainsi, $y = -6(x+3) + 9 = -6x - 9$.
Donc T a pour équation $y = -6x - 9$.
On rappelle $K(-2; 3)$.
$-6x_k - 9 = -6 \times (-2) - 9 = 12 - 9 = 3 = y_k$.

Les coordonnées de K vérifient l'équation de la droite : $K \in T$.