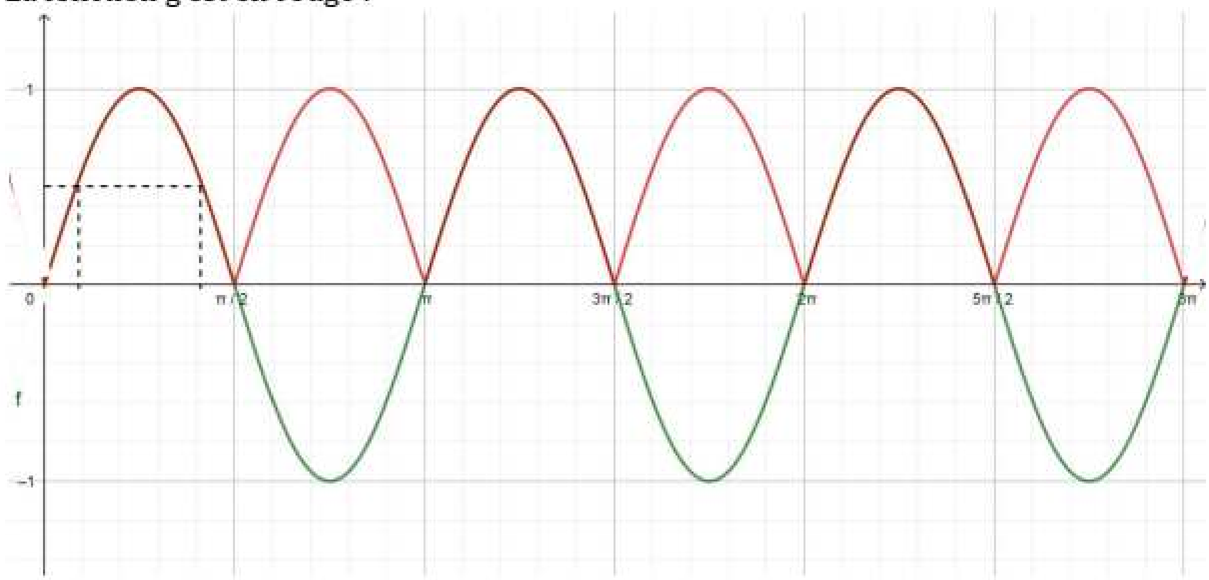
CORRECTION DU DEVOIR COMMUN 1 STI2D

Exercice 1 :

1) La fonction f semble être périodique de période π sur $\mathbb{R}$
2) $f(t+\pi) = \sin(2(t+\pi)) = \sin(2t+2\pi) = \sin(2t) = f(t)$ car la fonction sinus est périodique de période 2π sur $\mathbb{R}$.
3) a) $\sin(2t) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{6}$ ou $2t = \frac{5\pi}{6}$ sur $[0\,;\pi] \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{12}$ ou $t = \frac{5\pi}{12}$ sur $[0\,;\pi]$
   Les solutions de cette équation sur $[0\,;\pi]$ sont $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12}$.
   b) On remarque que $\sin(2t) = f(t)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ donc résoudre cette équation graphiquement revient à chercher les antécédents de $\frac{1}{2}$ par la fonction f sur $[0\,;\pi]$ (voir le graphique)
4) La fonction g est en rouge !



Exercice 2 :

Partie A : Etude de l'échantillon du lundi

Temps d'attente en caisses (en Min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de clients	13	14	22	10	13	9	11	5	2	1
Effectif Cumulés croissants	13	27	49	59	72	81	92	97	99	100

1) a) $\bar{x} \approx 4{,}1 \quad et \quad \sigma \approx 2{,}3$
b) l'effectif total est 100
La médiane est la moyenne entre la 50ème et la 51ème valeur à savoir 4. Med = 4
$\frac{1}{4} \times 100 = 25$ $\qquad Q_1$ est la 25ème valeur donc $Q_1 = 2$
$\frac{3}{4} \times 100 = 75$ $\qquad Q_3$ est la 75ème valeur donc $Q_3 = 6$

2) a) Nombre de clients attendant 7 minutes ou plus : 11 + 5 + 2 + 1 = 19 ; Nombre total de clients : 100.
Donc 19 % des clients attendent 7 minutes ou plus en caisse, il doit donc ouvrir une nouvelle caisse.

b $\bar{x} - 2\sigma \approx -05$ et $\bar{x} + 2\sigma \approx 8{,}7$
Dans l'intervalle $[-0{,}5; 8{,}7]$ il y a 97 valeurs .

Donc au moins 95% des clients ont un temps compris dans l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma; \bar{x} + 2\sigma]$, il doit fermer une caisse.

Partie B : <u>Etude de l'échantillon du vendredi</u>
1) a. Vrai car la médiane est de 5, ce qui signifie qu'au moins la moitié des clients attendent 5 minutes ou moins.
b. Vrai, $Q_1 = 3$, ce qui signifie qu'au moins 75 % des clients attendent 3 minutes ou plus.

2) Le lundi, 22+10+13+9+11+5 = 70 client attendent entre 3 et 8 minutes.
Le vendredi, au moins la moitié des clients attendent entre Q1 et Q3, c'est a dire entre 3 et 8 minutes incluses, c'est-à-dire au moins 50. Il peut donc très bien y en avoir autant mais on ne peut pas l'affirmer.

<u>Exercice 3 :</u>
L'altitude d'un plongeur de haute voltige, en mètres, repérée par rapport au niveau de l'eau, est exprimée en fonction du temps écoulé t, en secondes, depuis le départ d'une falaise par :

$$h(t) = -t^2 + 2t + 15$$

1) De quelle hauteur de la falaise saute le plongeur ?

La hauteur de la falaise est la hauteur à laquelle se trouve le plongeur à $\boldsymbol{t = 0}$. Elle est donc égale à :

$$\boldsymbol{h(0) = -0^2 + 2 \times 0 + 15 = 15}$$

La hauteur de la falaise est donc de 15 m.

2) Au bout de combien de temps le plongeur arrive-t-il dans l'eau ? Justifier !

Le plongeur arrive dans l'eau lorsque la hauteur est nulle. Il faut donc résoudre l'équation $\boldsymbol{h(t) = 0}$, soit $\boldsymbol{-t^2 + 2t + 15 = 0}$.

On calcule le déterminant : $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times 15 = 64}$

<u>Le déterminant est positif donc l'équation possède deux :</u>

$$\boldsymbol{t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \times (-1)} = \frac{-2 - 8}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5}$$

et

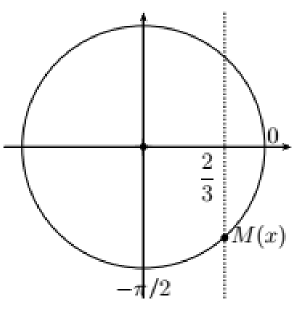
$$\boldsymbol{t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \times (-1)} = \frac{-2 + 8}{-2} = \frac{6}{-2} = -3}$$

Comme une durée est positive, le plongeur arrive dans l'eau au bout de 5 s.

<u>Exercice 4 :</u>

Soit x un réel de $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ tel que $\cos x = \frac{2}{3}$.
On note M le point du cercle trigonométrique associé au réel x.

1. Faire une figure, placer M.



2. Calculer $\sin x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
Donc $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.
D'où $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ou $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.
Comme $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $\sin x \leqslant 0$.

$\boxed{\text{Donc } \sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}.}$

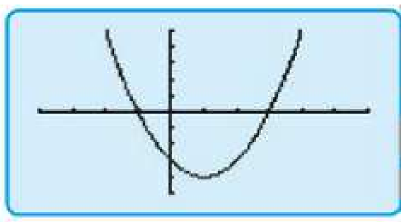
3. Calculer $\sin(\pi - x)$, $\cos(\pi - x)$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

$\sin(\pi - x) = \sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. $\qquad \cos(\pi - x) = -\cos x = -\frac{2}{3}$.
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

<u>Exercice 5</u>

1) Sin $\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 2) cos $\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 3) sin $\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sin$ (

4) les nombres $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{-19\pi}{6}$ sont solutions de l'équation sin (t) =



<u>Exercice 6 :</u>

Les questions 1 et 2 sont indépendantes
1. Résoudre l'inéquation $x^2 - 2x - 3 < 0$

On calcule le déterminant du polynôme $\boldsymbol{x^2 - 2x - 3}$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

Le déterminant est positif donc le polynôme possède deux racines :

$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -1}$ **et** $\boldsymbol{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 3}$

On a donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions de l'inéquation $\boldsymbol{x^2 - 2x - 3} < 0$ sont donc $\boldsymbol{S} =]-\mathbf{1}\,;\mathbf{3}\,[$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$
A l'aide de la calculatrice, on a représenté la parabole P qui représente f.
On donne un algorithme ci-dessous

Variables	a, b, c, s et t sont des nombres réels
Entrée	Saisir a, b et c
Traitement	s prend la valeur $-\frac{b}{2a}$
	t prend la valeur $a \times s^2 + b \times s + c$
Sortie	Afficher s et t

a. Qu'affiche cet algorithme lorsqu'on saisit a = 1, b = - 2 et c = - 3 ?

$\boldsymbol{s = -\frac{-2}{2\times 1} = 1}$ **et** $\boldsymbol{t = 1 \times 1^2 - 2 \times 1 - 3 = -4}$

b. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Cet algorithme détermine les coordonnées du sommet de la parabole.

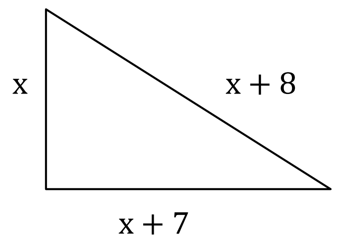
c. Quelles valeurs a, b et c doit on saisir pour que soient affichées les coordonnées du sommet de la parabole qui représente la fonction g définie par $g(x) = -5x^2 + x + 2$?

$\boldsymbol{a = -5}$ **,** $\boldsymbol{b = 1}$ **et** $\boldsymbol{c = 2}$

d. Comment modifier cet algorithme afin qu'il donne aussi la nature du sommet (minimum ou maximum) ?

Dans le Traitement, on ajoute :
Si a > 0 alors n= « minimum »
Sinon n= « maximum »
On modifie la Sortie pour écrire : Afficher $\boldsymbol{s}$**,** $\boldsymbol{t}$ **et** $\boldsymbol{n}$

<u>Exercice 7 :</u> On appelle x la longueur d'un des côtés de l'angle droit et si on traduit l'énoncé, on obtient la figure ci-dessous



Dans ce triangle rectangle, on applique le théorème de Pythagore, soit :

$x^2 + (x+7)^2 = (x+8)^2 \Leftrightarrow x^2 + x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 64$ donc cette équation admet deux solutions : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -3$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 5$

Comme une longueur est toujours positive donc x = 5

En conclusion, les longueurs de ce triangle rectangle sont de 5 cm, 12 cm et 13 cm.