1G. Interrogation n° 1.
Correction du sujet 1

Exercice 1 (cours, 2 points)
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
Posons $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, f n'a pas de racine réelle.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a une solution qui est $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Exercice 2 (2 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^2 + 10x - 2$. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -5(x-1)^2 + 3$.
En développant, $-5(x-1)^2+3 = -5(x^2-2x+1)+3 = -5x^2+10x-5+3 = -5x^2+10x-2 = f(x)$.

Exercice 3 (4 points)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x^2 - 9x - 11 = 0$.
   $a = 2$, $b = -9$ et $c = -11$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-11) = 81 + 88 = 169 = 13^2 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9-13}{4} = -1$. $\quad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9+13}{4} = \dfrac{11}{2}$.
   $\boxed{\text{Les solutions de l'équation sont } \frac{11}{2} \text{ et } -1.}$
2. $-2x^2 + 3x - 1 = -5x + 7$.
   Cela équivaut à $-2x^2 + 8x - 8 = 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (-2) \times (-8) = 0$.
   L'équation admet une seule solution.
   $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-8}{2 \times (-2)} = 2$. $\quad \boxed{S = \{2\}}$

Exercice 4 (2 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x + 7$. Mettre $f(x)$ sous forme canonique. Justifier.
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-(-1)}{2 \times 3} = \dfrac{1}{6}$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 7 = -83$, puis $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{-83}{4 \times 3} = \dfrac{83}{12}$.

$$\boxed{\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{83}{12}.}$$

Autre méthode :

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2 - x + 7 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right) + 7 \\
&= 3\left[x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right] + 7 \\
&= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - 3 \times \frac{1}{36} + 7 \\
&= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} + \frac{7 \times 12}{12} \\
&= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{83}{12}
\end{aligned}$$

Réponses du sujet 2

Exercice 6 (2 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 20x + 43$. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2(x+5)^2 - 7$.
On développe.
$2(x+5)^2-7 = 2(x^2+10x+25)-7 = 2x^2+20x+50-7 = 2x^2+20x+43 = f(x)$.

Exercice 7 (4 points)

1. $x^2 - 4x + 3 = 0$.
   $a = 1$, $b = -4$ et $c = 3$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 = 2^2 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-2}{2} = 1$. $\quad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+2}{2} = 3$.
   $\boxed{\text{Les solutions de l'équation sont 1 et 3.}}$
2. $2x^2 + 5x - 3 = -3x - 11$ Cela revient à $2x^2 + 8x + 8 = 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (2) \times (8) = 0$.
   L'équation admet une seule solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-8}{2 \times 2} = -2$.
   $\boxed{\text{L'équation a une seule solution qui est } -2.}$

Exercice 8 (2 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 7x + 7$.
$a = -2$, $b = -7$ et $c = 7$.
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-(-7)}{2 \times (-2)} = -\dfrac{7}{4}$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times (-2) \times 7 = 49 + 56 = 105$.
$\beta = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{105}{4 \times (-2)} = \dfrac{105}{8}$.

$$\boxed{\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = -2\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{105}{8}.}$$