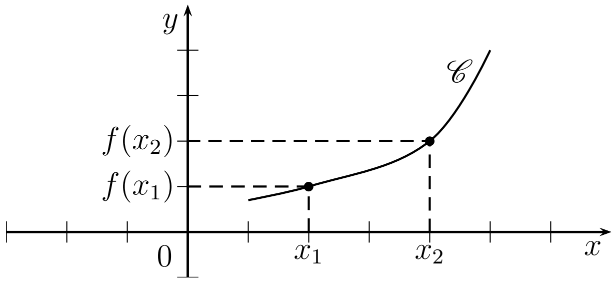
Chapitre 9 : Variations des fonctions et extrema

I Fonction croissante, décroissante sur un intervalle

I.1 Fonction croissante sur un intervalle

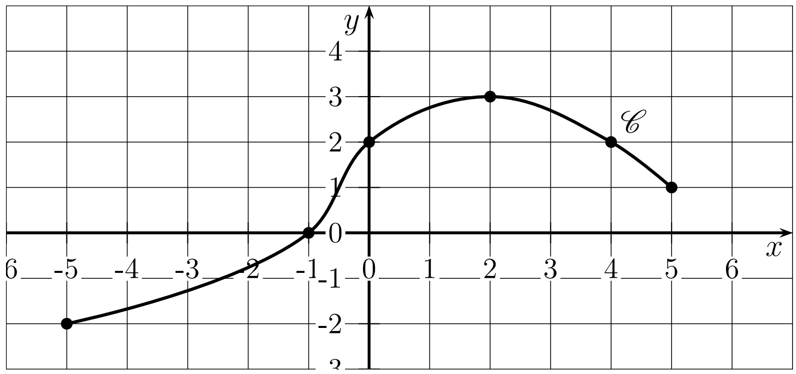
Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est croissante sur I lorsque pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I :

$$\text{si } x_1 < x_2, \text{ alors } f(x_1) \leqslant f(x_2).$$



Remarque
Une fonction croissante conserve l'ordre : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
Donc $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans le même ordre que x_1 et x_2 (l'inégalité est dans le même sens entre deux réels et leurs images respectives).
La courbe représentative d'une fonction croissante sur un intervalle I a une allure montante sur I.

Exercice 1
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5; 5]$.

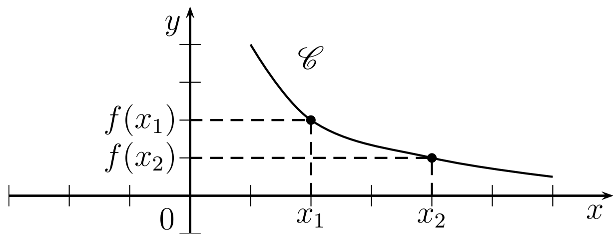


1. À l'aide du graphique, donner l'image par f des réels -5, -1, 0, 2, 4, et 5.
2. Justifier que f n'est pas croissante sur l'intervalle $[-5; 5]$.
3. Donner sans justifier le plus grand intervalle sur lequel f est croissante.

I.2 Fonction décroissante sur un intervalle

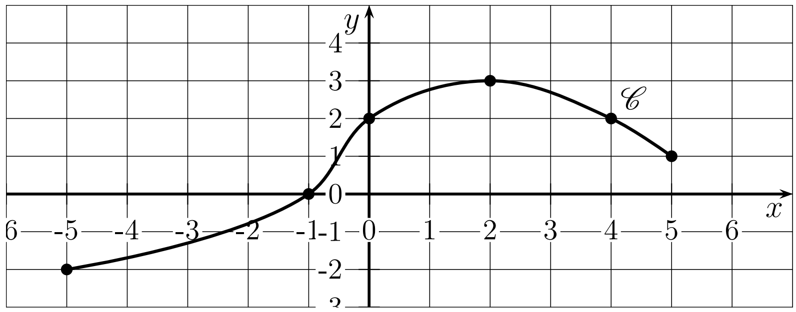
Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est décroissante sur I lorsque pour tous x_1 et x_2 appartenant à I :

$$\text{si } x_1 < x_2, \text{ alors } f(x_1) \geqslant f(x_2).$$



Remarque
Une fonction décroissante change l'ordre : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
Donc $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans l'ordre inverse de x_1 et x_2.
La courbe représentative d'une fonction décroissante sur un intervalle I a une allure descendante sur I.

Exercice 2
On reprend les données de l'exercice 1.



1. Montrer que f n'est pas décroissante sur $[-5; 5]$.
2. Donner sans justifier le plus grand intervalle où f est décroissante.

Remarque
En remplaçant avec des inégalités strictes dans les définitions précédentes, on définit une fonction strictement croissante (resp strictement décroissante) :
La fonction f est strictement croissante sur I lorsque :

$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in I, \text{ si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) < f(x_2).$$

La fonction f est strictement décroissante sur I lorsque :

$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in I, \text{ si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) > f(x_2).$$

Définition (fonction monotone)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est monotone sur I si elle est croissante sur I, ou décroissante sur I (un seul sens de variation sur tout l'intervalle).

II Variations des fonctions affines

Exercice 3
1. Montrer que la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 7$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x+1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a = 0$, alors f est constante et $\mathscr{C}_f$ est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Démonstration

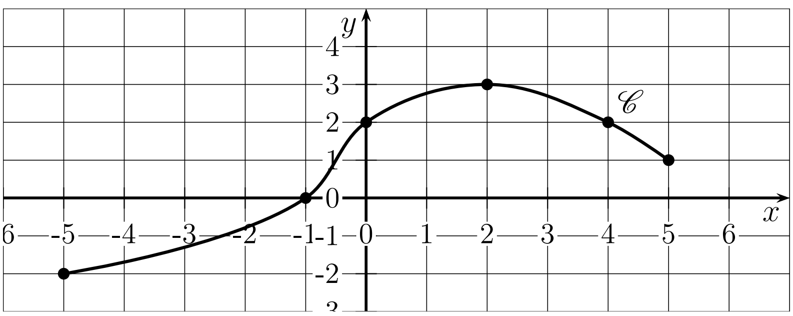
1. On suppose que $a > 0$.
   Soient x_1 et x_2 deux réels, avec $x_1 < x_2$.
   Pour comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$, on forme la soustraction $f(x_1) - f(x_2)$.
   $f(x_1) - f(x_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   Comme $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   En multipliant par $a > 0$, on a $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   Donc on a $f(x_1) - f(x_2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   Ainsi, pour tous réels x_1 et x_2, si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \ldots f(x_2)$.
   f est strictement $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que $a < 0$.
   Soient x_1 et x_2 deux réels, avec $x_1 < x_2$.
   Pour comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$, on forme la soustraction $f(x_1) - f(x_2)$.
   $f(x_1) - f(x_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   Comme $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   En multipliant par $a < 0$, on a $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   Donc on a $f(x_1) - f(x_2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   Ainsi, pour tous réels x_1 et x_2, si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \ldots f(x_2)$.
   f est strictement $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ sur $\mathbb{R}$.
3. Si $a = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = b$, donc la fonction f est constante. □

Exercice 4
Déterminer le sens de variation sur $\mathbb{R}$ des fonctions affines suivantes.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 11$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -13x - 6$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 0,4 - x$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = \dfrac{1}{5}x - 8$.

III Tableau de variations d'une fonction

On résume les variations d'une fonction dans un tableau de variations.
Il précise les plus grands intervalles où la fonction est croissante ou décroissante.
Exemple :
On reprend la fonction de l'exercice 1.

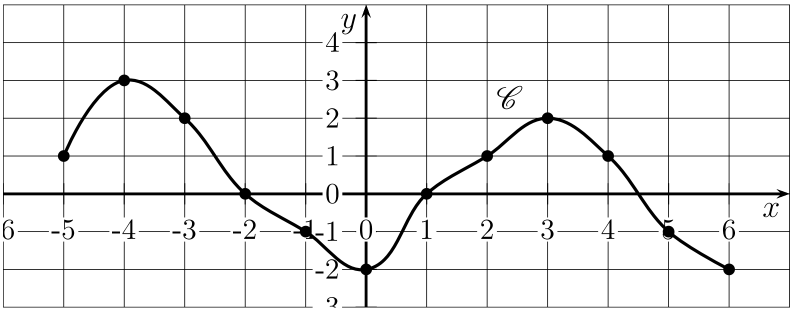


La fonction f est définie sur l'intervalle $[-5;5]$.
Elle est croissante sur $[-5;2]$, et décroissante sur $[2;5]$.

x	-5		2		5
$f(x)$			3		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	-2				1

Remarque
Dans la ligne de $f(x)$, à chaque fois que c'est possible, on indique les images correspondantes par f.

Exercice 5
Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5;6]$.



Dresser le tableau de variation de f.

IV Extrema d'une fonction

Définition
Soit f une fonction définie sur I. Soit $a \in I$.

1. On dit que f admet un maximum en a lorsque
$$\text{pour tout } x \in I,\ f(x) \leqslant f(a).$$
Le maximum de f sur I est $f(a)$.
2. On dit que f admet un minimum en a lorsque
$$\text{pour tout } x \in I,\ f(x) \geqslant f(a).$$
Le minimum de f sur I est $f(a)$.
3. Un extremum est un maximum ou un minimum.

Exercice 6
On reprend la fonction de l'exercice 5. Compléter.

1. Le maximum de f est .... Il est atteint en ....
2. Le minimum de f est .... Il est atteint en ... et ....