Nom : Lundi 16/05/2022

Prénom :

1G. Interrogation n° 10

Exercice 1 (5 points)

Une entreprise emprunte 2 000 000 € à une banque, à rembourser par mensualités sur 10 ans.

Partie A

Dans la première formule proposée par la banque, l'entreprise rembourse 8000 € lors de la première mensualité, puis chaque mensualité suivante augmente de

300 €. On appelle u_1 la première mensualité et u_{120} la dernière.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   Reconnaître la nature de la suite (u_n) et préciser ses caractéristiques.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer la somme totale remboursée en 10 ans par l'entreprise.

Partie B

La banque propose une deuxième formule à l'entreprise : on appelle v_1 le premier versement, à déterminer. Chaque mensualité augmente de 1 % par rapport à la précédente, jusqu'à v_{120}.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   Reconnaître la nature de la suite (v_n) et préciser ses caractéristiques.
2. Exprimer v_n en fonction de n et de v_1.
3. Exprimer le versement total en 10 ans en fonction de v_1 (On donnera une valeur exacte).
4. Que doit valoir v_1 pour que le versement total soit de 3 000 000 € seulement ? on arrondira au centime près.

Exercice 2 (5 points)

Un jeu consiste à miser 10 euros, puis à réaliser un tirage en deux étapes.

1^re^ étape : le joueur tire au hasard un billet dans un panier contenant 8 billets marqués U_1 et 2 billets marqués U_2.

2^e^ étape :

— Si le joueur obtient un billet marqué U_1 il tire un jeton dans l'urne U_1 composée de 7 jetons "perdants" et 3 "gagnants".

— Si le joueur obtient un billet marqué U_2 il tire un jeton dans l'urne U_2 composée de 8 jetons "perdants" et 2 "gagnants".

On note A l'événement "le joueur tire un billet marqué U_1", et G l'événement "le joueur tire un jeton gagnant".

1. Construire un arbre pondéré décrivant le jeu.
2. Montrer que $P(A \cap G) = 0,24$.
3. Déterminer $P(G)$.
4. Déterminer $P_G(A)$.
5. Le joueur reçoit 35 euros s'il obtient un jeton gagnant de l'urne U_1, et 40 euros s'il obtient une jeton gagnant de l'urne U_2. Sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain algébrique du joueur.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   (b) Déterminer la loi de X.
   (c) Ce jeu est-il équitable ? Justifier.

Exercice 3 (2 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x-5}{2\mathrm{e}^x}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (4 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Écrire sous la forme e^K où K est une expression de x.
   $A(x) = \dfrac{\mathrm{e}(\mathrm{e}^{-3x})^2}{\mathrm{e}^{5x}}$
2. Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ de l'expression $B(x) = 7\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^2)(\mathrm{e}^{-x} + 1) = 0$.
4. Soit f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 20(x-1)\mathrm{e}^{-0,5x}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-10x+30)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

Exercice 5 (2 points)

On se place dans un repère orthonormé du plan. Soient les points $E(3;5)$, $F(-1;4)$ et $G(-6;0)$.

1. Calculer $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}$, puis les longueurs EF et EG.
2. En déduire une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{FEG}$.

Exercice 6 (2 points)

$ABCD$ est un trapèze rectangle en A dont la diagonale $[AC]$ est perpendiculaire au côté $[BC]$.

En exprimant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux manières différentes, justifier que $AC^2 = AB \times CD$.