

Spécialité - Chapitre 1 : Nombres complexes

I Rappels

I.1 Forme algébrique, conjugué, opérations

Définition (et théorème)

Il existe un ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, qui possède les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $i^2 = -1$.
2. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est inclus dans $\mathbb{C}$.
3. Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique $z = a + ib$, avec a et b réels.
4. L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.

Définition (conjugué : $\bar{z}$)

Soit $z = a + ib$, avec a, b réels. Le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

Propriété

Pour tous nombres réels a et b , $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

Remarque (forme algébrique d'un quotient)

Pour obtenir la forme algébrique d'un quotient de deux nombres complexes, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Propriété (opérations sur la conjugaison)

Soient z et z' deux nombres complexes.

1. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$.
2. $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$.
3. Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$.

I.2 Nombre complexe et géométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Il est ainsi appelé plan complexe.

Définition

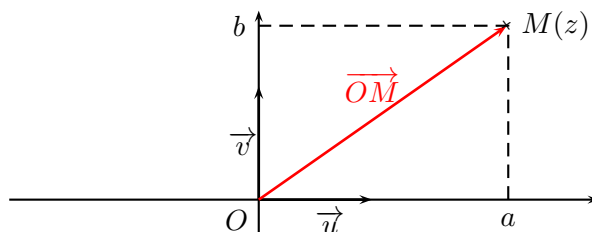
Soient a et b deux nombres réels.

À tout nombre complexe $z = a + ib$ on associe le point du plan $M(a; b)$.

Réciproquement, à tout point point $M(a; b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$.

On dit que M est l'image du nombre complexe z , et que z est l'afixe du point M .

z est aussi l'afixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.



Remarque

Si M est l'image du nombre complexe $z = a + ib$, alors l'image de son conjugué $\overline{z} = a - ib$ est le point M' symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Propriété

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}} = z_{\overrightarrow{w}} + z_{\overrightarrow{w'}}$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, le vecteur $k\overrightarrow{w}$ a pour affixe $z_{k\overrightarrow{w}} = k \times z_{\overrightarrow{w}}$.
4. Le milieu I du segment $[AB]$, a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

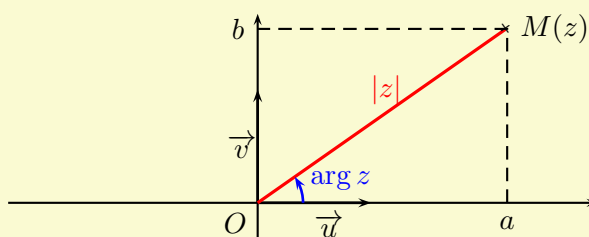
I.3 Module et argument d'un nombre complexe

Définition

Soient $z = a + ib$ avec x, y réels un nombre complexe et M son image dans le plan complexe.

1. Le module de z , noté $|z|$ est la distance OM , soit $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. Si z est non nul, un argument de z , noté $\arg z$ est une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM})$.

Pour $z \neq 0$, $\arg z = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM})$, à 2π près.



Propriété (distance entre deux points)

Pour tous points A et B d'affixes respectives z_A et z_B , $AB = |z_B - z_A|$.

I.4 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Définition (et théorème)

Soit z un nombre complexe non nul. Posons $r = |z|$ et $\theta = \arg z$.

Alors, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Cette écriture est appelée une forme trigonométrique de z . On note aussi $z = [r; \theta]$.

Propriété

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = a + ib$, avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z$. Alors,

Passage de la forme algébrique
à la forme trigonométrique :

- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\cos \theta = \frac{a}{r}$
- $\sin \theta = \frac{b}{r}$

Ceci permet de retrouver θ .

II Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Définition

Pour tout nombre réel θ (lire "theta"), on appelle **exponentielle complexe** d'argument θ le nombre $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

$e^{i\theta}$ désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument θ .

Définition

Tout nombre complexe non nul de module $r > 0$ et dont un argument est θ peut s'écrire sous la forme $z = re^{i\theta}$.

L'écriture $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ est appelée **forme exponentielle** du nombre complexe z .

Propriété

Réciproquement, pour tous $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $re^{i\theta}$ est un nombre complexe de module r et d'argument θ .

Exemples :

1. Le nombre complexe de module 3 et d'argument $\frac{\pi}{4}$ a pour écriture exponentielle $z = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$.
2. Le nombre $z = e^{i\frac{\pi}{5}}$ a pour module 1 et pour argument $\frac{\pi}{5}$.
3. Le nombre $z = \left[7; -\frac{4\pi}{3}\right]$ a pour forme exponentielle $z = 7e^{i \times (-\frac{4\pi}{3})}$ qui s'écrit plus simplement $7e^{-i\frac{4\pi}{3}}$.

Remarque

$e^{i0} = 1$, et $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Remarque (attention)

L'écriture $z = -3e^{i0}$ n'est pas une forme exponentielle, car $-3 < 0$.

En revanche, $z = -3(\cos 0 - i \sin 0) = -3(1 + 0i) = -3 + 0i = 3(-1 + 0i) = 3(\cos \pi + i \sin \pi) = 3e^{i\pi}$ qui est bien une forme exponentielle.

Donc le module est 3 et un argument est π .

Propriété (passage forme algébrique – forme exponentielle)

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = a + ib$, avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z$. Alors,

Passage de la forme algébrique

à la forme exponentielle :

- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\cos \theta = \frac{a}{r}$
- $\sin \theta = \frac{b}{r}$

Passage de la forme trigonométrique

à la forme algébrique :

- $a = r \cos \theta$
- $b = r \sin \theta$

Exercice 1

1. Soit $z = \sqrt{3} - i$. Mettre z sous forme exponentielle.
2. Soit $z = 6e^{i\frac{\pi}{4}}$. Mettre z sous forme algébrique.

III Calculs sous forme exponentielle

On admet que les propriétés des exponentielles complexes sont similaires à celles de l'exponentielle réelle.

Propriété

Pour tous réels θ et θ' ,

1. $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.
2. $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (formule de Moivre).

Remarque (conjugué)

On sait que $|\bar{z}| = |z|$ et que, pour $z \neq 0$, $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.

On en déduit que si $z = re^{i\theta}$, alors $\bar{z} = re^{-i\theta}$.

Exercice 2

On donne $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, et $z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$.

1. Calculer $z_1 \times z_2$
2. Calculer $\frac{z_1}{z_2}$
3. Calculer le conjugué de z_1 .

IV Application aux formules de trigonométrie**Propriété (formules d'addition)**

Pour tous réels a et b .

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Démonstration

La notation exponentielle permet de retrouver des formules de trigonométrie.

Sur les formules d'addition par exemple, pour tous réels a et b ,

$$\begin{aligned} e^{i(a+b)} &= e^{ia} \times e^{ib} \\ \cos(a+b) + i\sin(a+b) &= (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) \\ &= \cos a \cos b + i\cos a \sin b + i\sin a \cos b - \sin a \sin b \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \sin b \cos a) \end{aligned}$$

D'où, en identifiant les parties réelles et imaginaires,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

On procède de même pour les formules de $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$. □

Exercice 3

Vérifier que $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$.

En déduire que $\sin(\frac{7\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Exercice 4

À l'aide d'une formule d'addition, donner une autre expression de $f(t) = 4\cos(2t + \frac{\pi}{3})$.

Propriété (formules de duplication)

Pour tout réel a ,

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

Démonstration

Il suffit de remplacer b par a dans les formules d'addition.

$$\cos(2a) = \cos(a + a) = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\sin(2a) = \sin(a + a) = \dots\dots\dots$$

Exercice 5

1. Exprimer $\cos \frac{\pi}{4}$ en fonction de $\cos \frac{\pi}{8}$.
2. Exprimer $\sin \frac{\pi}{6}$ en fonction de $\sin \frac{\pi}{12}$.

Propriété (formules de linéarisation)

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

Démonstration

On isole $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$ dans les fomules de duplication.

□

Exercice 6

1. Exprimer $\cos^2 \frac{\pi}{8}$ en fonction de $\cos \frac{\pi}{4}$.
2. Exprimer $\sin^2 \frac{\pi}{12}$ en fonction de $\cos \frac{\pi}{6}$.

Remarque

Ces formules de linéarisation (on enlève le carré) sont utilisées en particulier pour des calculs de primitives.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \cos t - \sin t$.

1. L'expression est-elle de la forme $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$. Si oui, préciser les valeurs de a , b et ω (ω se lit "omega").
2. Déterminer deux réels A et φ ("phi") tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = A \cos(t + \varphi)$.

Remarque (transformation d'écriture, trouver A et φ)

Si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \cos(t + \varphi)$, alors $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, et $\cos \varphi = \frac{a}{A}$, et $\sin \varphi = \frac{-b}{A}$.

V Transformations du plan

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
Une transformation du plan associe à un point M du plan un point M' appelé son image.

V.1 Translation

Exercice 8

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 + 3i$ et $z_B = -1 + 2i$.

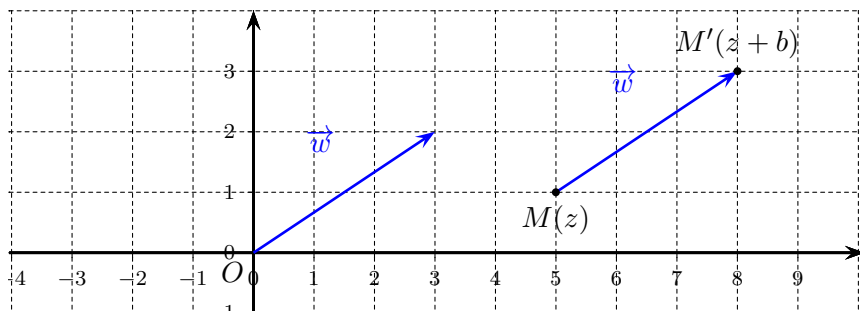
1. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Soient $D(1 + i)$ et $E(-2 - i)$ deux points du plan.
 - (a) Placer A, B, D, E .
 - (b) Soit D' l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On a $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AB}$. Déterminer l'affixe de D' , puis placer D' .
 - (c) Déterminer de même l'affixe de E' , image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Propriété

Soit b un nombre complexe. On note $\vec{w}$ le vecteur d'affixe b .

La transformation qui, à tout point M du plan complexe d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = z + b$ est la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b .

Ainsi, on a $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$.



Exercice 9

Reconnaître les transformations complexes qui sont des translations en précisant le vecteur de la translation.

1. $f(z) = z + i$
2. $g(z) = z - 3 + 5i$
3. $h(z) = z$
4. $k(z) = \frac{1}{2}(2z + i)$

V.2 Homothétie de centre O

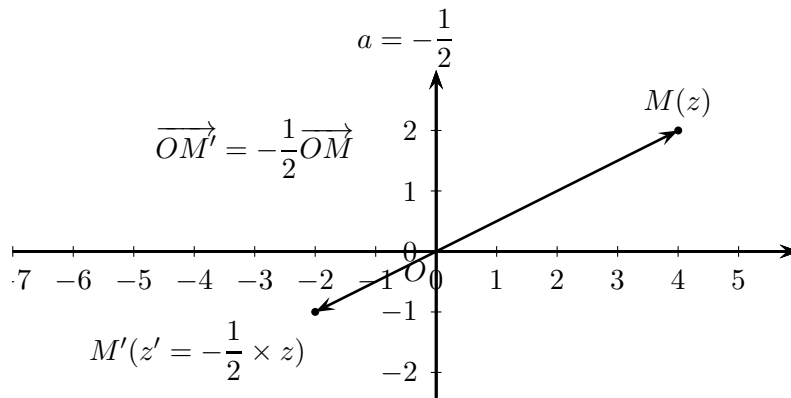
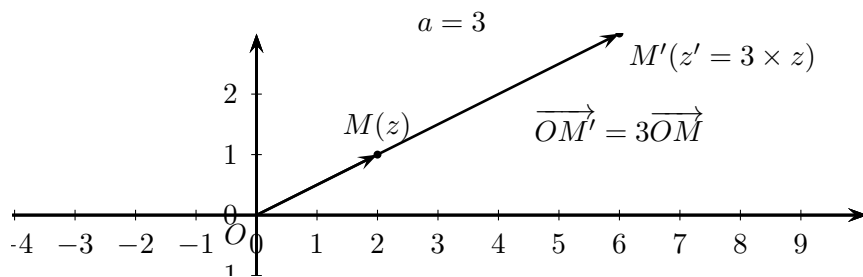
Propriété

Soit a un nombre réel non nul.

La transformation qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = a \times z$ est l'homothétie de centre O et de rapport a .

On a donc $\overrightarrow{OM'} = a\overrightarrow{OM}$.

Illustrations



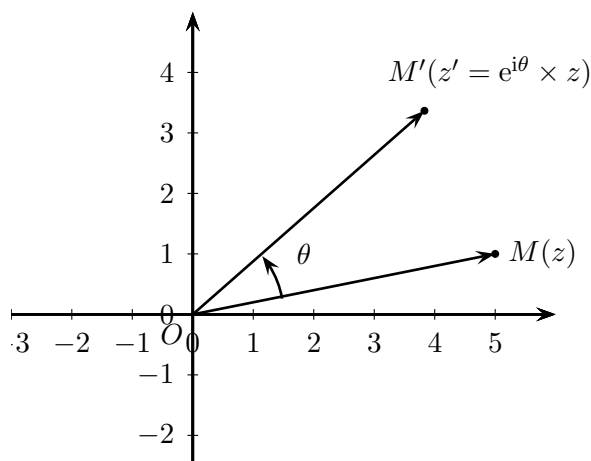
V.3 Rotation de centre O

Propriété

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

La transformation qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = e^{i\theta} \times z$ est la rotation de centre O et d'angle θ .

On a donc $OM' = OM$ (distances), et $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = \theta$ modulo 2π .



Exercice 10

Compléter le tableau.

Transformation	Écriture complexe
Rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$	$z' = 5z$
Homothétie de centre O et de rapport -2	
Rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$	$z' = e^{i\frac{2\pi}{5}} z$