Correction du devoir maison n° 2

Exercice 1 (TP page 188, partie 2)

La pression de l'air (en Pascals) en fonction du temps (en secondes) est exprimée par $P(t) = 2\sin(880\pi t)$.

1. Déterminer l'amplitude. Justifier qu'elle correspond au maximum de la fonction.
   Dans l'expression $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, A est l'amplitude.
   Ici, on reconnaît $A = 2$.
   On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.
   Le maximum de la fonction sinus est 1.
   $\boxed{\text{Donc le maximum de la pression est 2, et l'amplitude égale à 2 corrrespond au maximum de la fonction.}}$

2. (a) Montrons que $P(t+T) = P(t)$ où $T = \dfrac{1}{440}$.
   $$P(t+T) = P\left(t + \frac{1}{440}\right) = 2\sin\left(880\pi \times (t + \frac{1}{440})\right)$$
   $P(t+T) = 2\sin(880\pi t + 2\pi) = 2\sin(880\pi t) = P(t)$.
   En effet $\sin(X + 2\pi) = \sin(X)$ pour tout X réel.
   $\boxed{\text{Cela signifie que la fonction } P \text{ est périodique de période } T = \dfrac{1}{440}.}$

   (b) Déterminer la pulsation et faire le lien avec la période.
   La pulsation est ω dans l'expression $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.
   Or, on a $P(t) = 2\sin(880\pi t)$.
   Ici, $\omega = 880\pi$. $\boxed{\text{La pulsation est } \omega = 880\pi.}$
   Comme $T = \dfrac{1}{440}$, on a $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega}.}$
   En effet, $\dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{880\pi} = \dfrac{1}{440} = T$.

3. Parmi les 3 courbes, seules les deux premières on un maximum égal à 2.
   On peut donc éliminer la courbe n° 3.
   Ensuite, la période de la fonction est de $T = \dfrac{1}{440} \approx 0,0023$.
   Seule la courbe 2 convient pour ce critère (sur la courbe 1, la période est d'environ 0,0025).
   $\boxed{\text{La courbe de la pression } P \text{ est la courbe 2.}}$

4. (a) Montrons que la pression est à la moitié de sa valeur maximale si $\sin(880\pi t) = \dfrac{1}{2}$.
   On a vu que la maximum de la pression est 2.
   On étudie donc l'équation $P(t) = \dfrac{1}{2} \times 2 = 1$.
   $\boxed{\text{Cela revient à } 2\sin(880\pi t) = 1, \text{ soit } \sin(880\pi t) = \dfrac{1}{2}.}$

   (b) Montrons que si $t \in [0; \dfrac{1}{440}]$, alors la phase instantanée est dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.
   La phase instantanée est $\omega t + \varphi = 880\pi t$.
   $$\begin{array}{rcl} 0 \leqslant & t & \leqslant \dfrac{1}{440} \\ 0 \leqslant & 880t & \leqslant \dfrac{880}{440} = 2 \\ 0 \leqslant & 880\pi t & \leqslant 2\pi \end{array}$$
   $\boxed{\text{Donc si } t \in [0; \dfrac{1}{440}], \text{ alors } 880\pi t \in [0; 2\pi].}$

   (c) Résoudre l'équation $\sin X = \dfrac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi]$, et en déduire les réponses au problème.
   En s'appuyant sur le cercle trigonométrique,
   $\sin X = \dfrac{1}{2}$ ssi $(X = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, ou $X = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z})$.
   Dans $[0; 2\pi]$, les solutions $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.
   Ainsi, $880\pi t = \dfrac{\pi}{6}$ ou $880\pi t = \dfrac{5\pi}{6}$.
   Finalement, il vient $t = \dfrac{1}{6 \times 880} = \dfrac{1}{5280}$,
   ou $t = \dfrac{5}{6 \times 880} = \dfrac{5}{5280} = \dfrac{1}{1056}$.
   $\boxed{\text{Conclusion : dans l'intervalle } [0; \dfrac{1}{440}], \text{ la pression est à la moitié de sa valeur maximale aux instants } t = \dfrac{1}{5280}, \text{ et } t = \dfrac{1}{1056} \text{ (exprimés en secondes).}}$