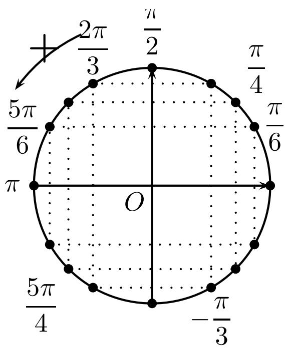
1 STI3. Interrogation n° 2
Correction du sujet 1

Exercice 1 (5 points)

1. Placer sur le cercle ci-dessous les images des réels suivants :
   π ; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$.
2. Donner sans justifier les valeurs exactes de :

$\cos\pi = -1$; $\sin\frac{\pi}{2} = 1$; $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos -\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;
$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Exercice 2 (2 points)

Étudier si x et y ont la même image sur le cercle trigonométrique. Justifier.

1. $x = -\frac{17\pi}{4}$ et $y = \frac{15\pi}{4}$.
   x et y ont la même image sur le cercle ssi $x - y$ est un multiple de 2π.
   $x - y = -\frac{17\pi}{4} - \frac{15\pi}{4} = -\frac{32\pi}{4} = -8\pi = -4 \times 2\pi$.
   x et y ont la même image sur le cercle.
2. $x = \frac{7\pi}{9}$ et $y = \frac{52\pi}{9}$.
   $x - y = \frac{7\pi}{9} - \frac{52\pi}{9} = -\frac{45\pi}{9} = -5\pi$, qui n'est pas un multiple de 2π.
   x et y n'ont pas la même image sur le cercle.

Exercice 3 (2 points)

Soit un angle orienté dont une mesure est $\frac{47\pi}{3}$.
Déterminer, parmi les nombres proposés suivants, lequel est la mesure principale de cet angle. Justifier la réponse.

a. $\frac{\pi}{3}$ **b.** $-\frac{\pi}{3}$ **c.** $\frac{4\pi}{3}$ **d.** $\frac{2\pi}{3}$.

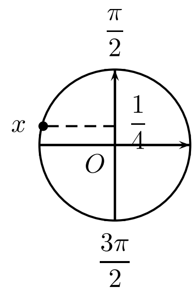
$\frac{47\pi}{3} - \left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{48\pi}{3} = 16\pi = 8 \times 2\pi$ est un multiple de 2π.

Donc $\frac{47\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$ sont des mesures d'un même angle.
Comme $-\frac{\pi}{3} \in]-\pi;\pi]$, c'est la mesure principale.

Exercice 4 (4 points)

Soit x le réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, tel que $\sin x = \frac{1}{4}$.

1. Placer l'image de x sur le cercle trigonométrique.



2. Déterminer la valeur exacte de $\cos x$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
   Donc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.
   Ainsi, $\cos x = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ou bien $\cos x = -\sqrt{\frac{15}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.
   Comme x appartient à $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, on a $\cos x \leqslant 0$. Donc $\boxed{\cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}}$.

Exercice 5 (5 points)

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle demandé. Aucune justification n'est demandée. On pourra s'aider du cercle trigonométrique.

1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $\mathbb{R}$.
   Les solutions sont les réels $\frac{\pi}{6} + k \times 2\pi$ et $-\frac{\pi}{6} + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\sin(x) = -1,5$ dans $\mathbb{R}$.
   L'équation n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
3. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ dans $[0;2\pi]$. Les solutions sont $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.
4. $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0;4\pi]$. Les solutions sont $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{4}$.

Exercice 6 (2 points, +1 bonus)

1. Compléter les formules sur les angles associés. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $\cos(-x) = \cos x$ $\qquad$ $\sin(-x) = -\sin x$

   $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\qquad$ $\sin(\pi - x) = \sin x$

2. On donne $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

   En déduire les valeurs exactes du cosinus et du sinus de $-\dfrac{\pi}{12}$ et de $\dfrac{11\pi}{12}$.

   Justifier.

   $\cos -\dfrac{\pi}{12} = \cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

   $\sin -\dfrac{\pi}{12} = -\sin\dfrac{\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

   $\cos\dfrac{11\pi}{12} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{12}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

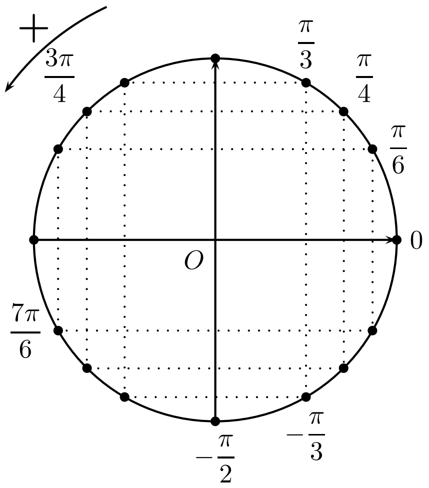
   $\sin\dfrac{11\pi}{12} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{12}\right) = \sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

1 STI3. Interrogation n° 2
Correction du sujet 2

Exercice 7 (5 points)

1. Placer sur le cercle ci-dessous les images des réels suivants :
$0\,;\,-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{-\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{6}\,;\frac{7\pi}{6}$.
2. Donner sans justifier les valeurs exactes de :

$\boxed{\cos 0 = 1\,;\ \sin -\frac{\pi}{2} = -1\,;\ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,;\ \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,;\ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\,;\ \sin -\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,;\ \sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}.}$



Exercice 8 (2 points)

Étudier si x et y ont la même image sur le cercle trigonométrique. Justifier.

1. $x = \frac{27\pi}{4}$ et $y = \frac{15\pi}{4}$.
$x - y = \frac{27\pi}{4} - \frac{15\pi}{4} = \frac{12\pi}{4} = 3\pi$, qui n'est pas un multiple de 2π (car -3 est impair).
$\boxed{x \text{ et } y \text{ n'ont pas la même image sur le cercle.}}$
2. $x = \frac{7\pi}{6}$ et $y = -\frac{41\pi}{6}$. $x - y = \frac{7\pi}{6} - \frac{-41\pi}{6} = \frac{48\pi}{6} = 8\pi = 4 \times 2\pi$.
$\boxed{x \text{ et } y \text{ ont la même image sur le cercle.}}$

Exercice 9 (2 points)

Soit un angle orienté dont une mesure est $\frac{35\pi}{3}$.
Déterminer, parmi les nombres proposés suivants, lequel est la mesure principale de cet angle. Justifier la réponse.

a. $\frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $\boxed{\textbf{b. } -\frac{\pi}{3}}$ $\qquad$ **c.** $\frac{4\pi}{3}$ $\qquad$ **d.** $\frac{2\pi}{3}$.

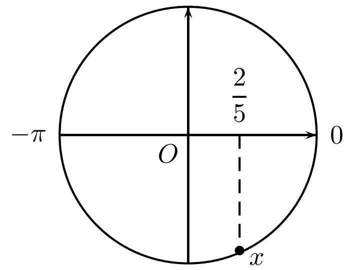
$\frac{35\pi}{3} - \left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{36\pi}{3} = 12\pi = 6 \times 2\pi$ est un multiple de 2π.

Donc $\frac{35\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$ sont des mesures d'un même angle.
Comme $-\frac{\pi}{3} \in]-\pi;\pi]$, c'est la mesure principale.

Exercice 10 (4 points)

Soit x le réel de l'intervalle $[-\pi;0]$, tel que $\cos x = \frac{2}{5}$.

1. Placer l'image de x sur le cercle trigonométrique.



2. Déterminer la valeur exacte de $\sin x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
Donc $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$.
Ainsi, $\sin x = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$ ou bien $\sin x = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.
Comme x appartient à $[-\pi;0]$, on a $\sin x \leqslant 0$.
Finalement, $\boxed{\sin x = -\frac{\sqrt{21}}{5}.}$

Exercice 11 (5 points)

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle demandé. Aucune justification n'est demandée. On pourra s'aider du cercle trigonométrique.

1. $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $\mathbb{R}$. $\qquad \boxed{x = \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$
2. $\cos(x) = 2$ dans $\mathbb{R}$. $\qquad \boxed{\text{Pas de solution, car } -1 \leqslant \cos x \leqslant 1.}$
3. $\cos(x) = \frac{1}{2}$ dans $[0;2\pi]$. $\qquad \boxed{\text{Les solutions sont } \frac{\pi}{3} \text{ et } \frac{5\pi}{3}.}$
4. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0;4\pi]$. $\qquad \boxed{S = \left\{\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}; \frac{15\pi}{4}\right\}.}$