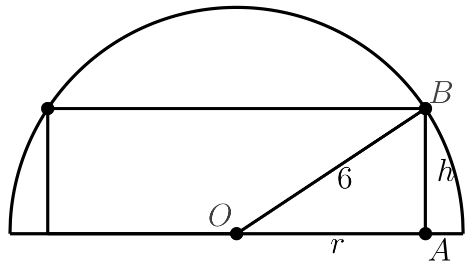
S6. Correction du Dm4

Exercice 1 (n° 106 page 79)

1. La hauteur h du cylindre est un nombre positif et inférieur au rayon de la demi-sphère.
   $\boxed{\text{Donc } h \text{ appartient à l'intervalle } [0;6].}$
2. Montrons que $r^2 + h^2 = 36$.

   Avec les notation ci-dessous, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OAB rectangle en A, $OA^2 + AB^2 = OB^2$, soit $r^2 + h^2 = 6^2$.
   $\boxed{\text{On a donc } r^2 + h^2 = 36.}$
3. Montrons que le volume du cylindre est $V(h) = 36\pi h - \pi h^3$.
   Le volume du cylindre est $V = aire(base) \times hauteur$.
   La base est un disque circulaire, qui a pour aire πr^2.
   $V(h) = \pi r^2 \times h$.
   Or, d'après la question précédente, $r^2 = 36 - h^2$.
   $\boxed{\text{Donc } V(h) = \pi \times (36 - h^2) \times h = 36\pi h - \pi h^3.}$
4. À l'aide de la calculatrice, le volume maximal semble être environ 261, obtenu lorsque $h \approx 3,5$.
5. On admet que V_{max} est obtenu lorsque $h = 2\sqrt{3}$.
   $h = 2\sqrt{3} \approx 3,46$.
   $V(2\sqrt{3}) = 36\pi \times 2\sqrt{3} - \pi \times (2\sqrt{3})^3 = 72\pi\sqrt{3} - \pi \times 8 \times 3 \times \sqrt{3} = 72\pi\sqrt{3} - 24\pi\sqrt{3} = 48\pi\sqrt{3} \approx 261,19$.
   $\boxed{\text{Le volume maximal du cylindre est de } 48\pi\sqrt{3} \approx 261,19 \text{ cm}^3.}$
   Ces résultats sont cohérents avec la conjecture à l'aide de la calculatrice.
   Déterminons le rayon du cylindre.
   D'après la question 2), $r^2 + h^2 = 36$, donc $r^2 = 36 - h^2 = 36 - (2\sqrt{3})^2 = 36 - 12 = 24$.
   Comme le rayon r est positif, $r = \sqrt{24}$ (et non $-\sqrt{24}$), donc $r = 2\sqrt{6}$.
   $\boxed{\text{Le rayon est alors de } 2\sqrt{6} \text{ (environ 4,9) cm.}}$
6. Quel pourcentage du volume la demi-sphère le cylindre de volume maximal occupe-t-il ?
   Le volume de la sphère de rayon r est $\dfrac{4}{3}\pi r^3$.
   Donc le volume de la demi-sphère est $V' = \dfrac{2}{3}\pi r^3$.
   Ici, la demi-sphère a pour rayon 6.
   D'où $V' = \dfrac{2}{3}\pi 6^3 = \dfrac{2}{3}\pi 2 \times 3 \times 36 = 4 \times 36\pi = 144\pi$.
   Déterminons le pourcentage du volume que représente le cylindre.
   $\dfrac{48\pi\sqrt{3}}{144\pi} = \dfrac{48\sqrt{3}}{144} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577$.
   $\boxed{\text{Au maximum, le cylindre occupe environ 57,7 \% du volume de la demi-sphère.}}$

Exercice 2

1. $(x+3)^2 \leqslant (4-3x)^2$

$$\begin{array}{rcl} (x+3)^2-(4-3x)^2 & \leqslant & 0 \\ ((x+3+(4-3x))\times(x+3-(4-3x)) & \leqslant & 0 \\ (-2x+7)(4x-1) & \leqslant & 0 \end{array}$$

Valeurs clés :
$-2x+7=0$ lorsque $x=\dfrac{7}{2}$.
$4x-1=0$ lorsque $x=\dfrac{1}{4}$.

x	$-\infty$		$1/4$		$7/2$		$+\infty$
$-2x+7$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-2x+7)(4x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boxed{S=\left]-\infty;\dfrac{1}{4}\right]\ \cup\ \left[\dfrac{7}{2};+\infty\right[.}$

2. $x^2-9 \geqslant 2x(x-3)$

$$\begin{array}{rcl} x^2-9 & \geqslant & 2x(x-3) \\ (x-3)(x+3)-2x(x-3) & \geqslant & 0 \\ (x-3)[(x+3)-2x] & \geqslant & 0 \\ (x-3)(-x+3) & \geqslant & 0 \end{array}$$

On peut remarquer que

$$(x-3)(-x+3)=-(x-3)(x-3)=-(x-3)^2.$$

Comme un carré est toujours positif ou nul, pour tout x réel, $-(x-3)^2 \leqslant 0$.
$\boxed{\text{La seule solution de l'inéquation est donc } x=3.}$

Sinon,
$x-3=0$ donne $x=3$
$-x+3=0$ donne aussi $x=3$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	
$-x+3$		$+$	0	$-$	
$(x-3)(-x+3)$		$-$	0	$-$	

$\boxed{S=\{3\}.}$