NOM : 14/04/2025
Prénom :

Terminale STL. Spécialité. Interrogation n° 11

Exercice 1 (6 points)
Compléter directement sur l'énoncé. Aucune justification n'est attendue.

1. Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \ln(3x-6)$.
   Pour tout $x > 2$, $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. La limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $-3\ln(x)+9$ est $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. La solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\mathrm{e}^{2x+1} = 21$ est $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. L'écriture sous la forme d'un seul logarithme de $2\ln(3)-\ln(5)$ est $\ln(\ldots\ldots\ldots)$.
5. La solution de l'équation $3+2\ln(x) = 11$ est $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
6. Dans $\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$, l'équation $\ln(2x+3) = 0$ admet comme solution $\ldots\ldots$

Exercice 2 (5 points)

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + \ln(x)$.
   (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Étudier les variations de f (on étudiera les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition : en $0+$ et en $-\infty$).
2. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x\ln(x)$.
   (a) Montrer que $g'(x) = 1+\ln(x)$.
   (b) Étudier les variations de g (on n'étudiera pas les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition).

Exercice 3 (3 points)
On considère l'inéquation $\ln(2x-1) < \ln(3-x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de l'inéquation.
2. Résoudre l'inéquation et donner son ensemble solution sous forme d'intervalle.

Exercice 4 (6 points)

Une équipe aérospatiale se propose d'envoyer un satellite de dix tonnes en orbite autour de la Terre par l'intermédiaire d'une fusée à un seul étage. Cette fusée a une masse à vide, c'est-à-dire sans carburant ni satellite, de 50 t (tonnes).

L'éjection des gaz permet à la fusée de décoller et de s'élever dans les airs jusqu'à la consommation finale du propergol, carburant contenu dans ses réservoirs. La vitesse d'éjection des gaz est $V_e = 3\,200\ m.s^{-1}$.

La vitesse finale de la fusée, vitesse atteinte lorsque les réservoirs sont vides, varie en fonction de la masse de propergol contenue au départ dans les réservoirs.

Elle doit être de 9600 $m.s^{-1}$ pour permettre la mise en orbite souhaitée.

Le but de l'exercice est de déterminer la masse de propergol à mettre dans les réservoirs pour permettre cette mise en orbite du satellite.

On note x la masse, en tonnes, de propergol contenu au décollage dans les réservoirs de la fusée.

La masse x est comprise entre 100 et 1 200 t. La masse totale de la fusée est alors $(x + 50)$ tonnes.

Il est établi que la vitesse finale de la fusée, $f(x)$, exprimée en $m.s^{-1}$, est donnée par : $f(x) = V_e \times [\ln(x + 50) - \ln(50)]$ où x est un réel de l'intervalle $[100; 1200]$.

1. Montrer que pour tout $x \in [100; 1200]$, $f(x) = 3200 \ln(0,02x + 1)$.
   On pourra choisir l'une ou l'autre des expressions de $f(x)$ pour répondre à chacune des questions suivantes.

2. (a) Si les réservoirs contiennent au décollage 100 tonnes de propergol, quelle sera la vitesse finale de la fusée (on donnera une valeur approchée au dixième) ?

   (b) Avec 400 t de propergol au décollage, la mise en orbite sera-t-elle possible ?

3. (a) Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f.

   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f.

4. Déterminer la masse de propergol à mettre dans les réservoirs pour permettre la mise en orbite souhaitée.

Exercice 5 (bonus, 2 points)

Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 100$ avec la condition initiale $y(0) = 20$.