Seconde. Interrogation de mathématiques n° 6

Correction du Sujet 2

Exercice 1 (questions de cours, 3 points)

1. Énoncer les trois identités remarquables.
   Pour tous réels a et b,
   $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
   $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
2. Énoncer la propriété de double distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
   Pour tous réels a, b, c et d, $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Exercice 2 (4 points)

Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A(x) = (6x+1)(6x-1)$.
   $\boxed{A(x) = (6x)^2 - 1^2 = 36x^2 - 1.}$
2. $B(x) = 11 - 4(x-3)^2$.
   $B(x) = 11 - 4(x^2 - 6x + 9) = 11 - 4x^2 + 24x - 36$.
   $\boxed{B(x) = -4x^2 + 24x - 25.}$
3. $C(x) = (2x+1)^2 - 5(x-4)(x-5)$.
   $C(x) = 4x^2 + 4x + 1 - 5(x^2 - 9x + 20) = 4x^2 + 4x + 1 - 5x^2 + 45x - 100$.
   $\boxed{C(x) = -x^2 + 49x - 99.}$

Exercice 3 (7 points)

Soit f la fonction définie que $\mathbb{R}$ par $f(x) = -18x^2 + 9x + 20$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (4-3x)(6x+5)$.
   En développant,
   $(4-3x)(6x+5) = 24x + 20 - 18x^2 - 15x = -18x^2 + 9x + 20 = f(x)$.
   $\boxed{\text{Donc } f(x) = (4-3x)(6x+5).}$
2. Calculer $f(0)$; $f(\sqrt{6})$; $f\left(\dfrac{4}{3}\right)$. Détailler les calculs.
   $f(0) = -18 \times 0^2 + 9 \times 0 + 20 = 20$.
   $f(\sqrt{6}) = -18 \times \sqrt{6}^2 + 9\sqrt{6} + 20 = -18 \times 6 + 9\sqrt{6} + 20$.
   $\boxed{f(\sqrt{6}) = -108 + 20 + 9\sqrt{6} = -88 + 9\sqrt{6}}$
   $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \left(4 - 3 \times \dfrac{4}{3}\right) \times \left(6 \times \dfrac{4}{3} + 5\right) = (4-4) \times \left(6 \times \dfrac{4}{3} + 5\right)$
   $\boxed{f\left(\dfrac{4}{3}\right) = 0 \times \left(6 \times \dfrac{4}{3} + 5\right) = 0}$
3. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 0$.
   On part de la forme factorisée de $f(x)$.
   $$(4-3x)(6x+5) = 0$$
   Un produit de facteurs est nul ssi l'un des facteurs est nul.
   $$4 - 3x = 0 \text{ ou bien } 6x + 5 = 0.$$
   $$x = \frac{4}{3} \text{ ou } x = -\frac{5}{6}.$$
   $\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(x) = 0 \text{ sont } \dfrac{4}{3} \text{ et } -\dfrac{5}{6}.}$
4. Déterminer les antécédents de 20 par le calcul.
   On résout l'équation $f(x) = 20$ à partir de la forme développée réduite.
   $$\begin{array}{rcl} -18x^2 + 9x + 20 & = & 20 \\ -18x^2 + 9x & = & 0 \\ x(-18x+9) & = & 0 \\ x = 0 & \text{ou} & -18x + 9 = 0 \\ x = 0 & \text{ou} & x = \dfrac{1}{2} \end{array}$$
   $\boxed{\text{Les antécédents de 20 sont 0 et } \dfrac{1}{2}.}$

Exercice 4 (2 points)

Factoriser les expressions suivantes.

1. $A(x) = 4x^2 + 20x + 25$.
   $\boxed{A(x) = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 5 + 5^2 = (2x+5)^2.}$
2. $B(x) = (2x-3)(x+5) - (11x-7)(2x-3)$.
   $$\begin{array}{rcl} B(x) & = & (2x-3)(x+5) - (11x-7)(2x-3) \\ & = & (2x-3)\left[(x+5) - (11x-7)\right] \\ & = & (2x-3)(x+5-11x+7) \\ & = & (2x-3)(-10x+12) \end{array}$$
   $\boxed{B(x) = (2x-3)(-10x+12) \text{ ou encore } B(x) = 2(2x-3)(6-5x).}$

Exercice 5 (4 points)

1. Montrer que pour tous réels a et b, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Pour tous réels a et b,
   $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b)$.
   $\boxed{(a-b)^3 = a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.}$
2. En déduire la forme développée de $(1-\sqrt{5})^3$.
   $(1-\sqrt{5})^3 = 1^2 - 3 \times 1^2 \times \sqrt{5} + 3 \times 1 \times 5 - 5\sqrt{5} = 1 + 15 - 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$.
   $\boxed{(1-\sqrt{5})^3 = 16 - 8\sqrt{5}.}$