1re G. Correction du dm1

Exercice 1

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Pour tout réel x, $-2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x - 2$.
   L'affirmation est fausse : l'égalité n'est pas vérifiée pour tous les réels.
   En effet, en prenant $x = 1$, le premier membre vaut 0 et le deuxième vaut -4.
2. Il existe un réel x tel que $-2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x - 2$.
   L'affirmation est vraie : l'égalité est vérifiée pour $x = 0$.

Exercice 2

1. Pour tout réel x, on a :
   d'une part

$$\begin{aligned}(x-1)x(x+1)(x+2)+1 &= (x-1)(x+1)x(x+2)+1 \\ &= (x^2-1)(x^2+2x)+1 \\ &= x^4+2x^3-x^2-2x+1\end{aligned}$$

   d'autre part

$$\begin{aligned}(x^2+x-1)^2 &= (x^2+x-1)(x^2+x-1) \\ &= x^4+x^3-x^2+x^3+x^2-x-x^2-x+1 \\ &= x^4+2x^3-x^2-2x+1\end{aligned}$$

   On en déduit que, pour tout réel x, on a : $(x-1)x(x+1)(x+2)+1 = (x^2+x-1)^2$.
2. En utilisant l'égalité précédente pour $x = 10$, on obtient :
   $9 \times 10 \times 11 \times 12 + 1 = (10^2 + 10 - 1)^2 = 109^2$.
   On en déduit que $9 \times 10 \times 11 \times 12 + 1$ est le carré de 109.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 2x + 2$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -(x+1)^2 + 3$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, $-(x-1)^2 + 3 = -(x^2 + 2x + 1) + 3 = -x^2 - 2x + 2 = f(x)$.
   Donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -(x+1)^2 + 3$.
2. On reconnaît la forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = -1$, $\alpha = -1$, et $\beta = 3$.
   La parabole est tournée vers le bas car $a = -1 < 0$, et a pour sommet le point $S(-1; 3)$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	

3. Soit (d) la droite d'équation $y = -x - 4$.
   (a) Tracer dans le repère ci-contre la courbe de f et la droite (d).
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-x-4) = (x+3)(2-x)$.
   D'une part, $f(x) - (-x-4) = -x^2 - 2x + 2 - (-x-4) = -x^2 - 2x + 2 + x + 4 = -x^2 - x + 6$.
   D'autre part, $(x+3)(2-x) = -x^2 - x + 6$.
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-x-4) = (x+3)(2-x)$.
   (c) En déduire le tableau de signe de $f(x) - (-x-4)$, puis la position relative de $\mathscr{C}_f$ et (d). On vérifiera la cohérence de ce résultat avec la graphique.
   Valeurs clés :
   $x + 3 = 0$ ssi $x = -3$, et $2 - x = 0$ ssi $x = 2$.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-(-x-4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   On en déduit que lorsque $x \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$, $f(x) < -x - 4$.
   Donc sur $]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de (d).
   Lorsque $x \in]-3; 2[$, $f(x) > -x - 4$.
   Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de (d) sur $]-3; 2[$.
   Enfin $f(x) = -x - 4$ ssi $x = -3$ ou $x = 2$, donc $\mathscr{C}_f$ et (d) se coupent aux points d'abscisses -3 et 2.
   On vérifie la cohérence de ces résultats avec le graphique.