2de. Correction du devoir maison n° 7

Exercice 1

L'an prochain, Mathilde consacrera 650 euros à ses loisirs, puis, pour faire des économies, elle prévoit à partir de l'année suivante de réduire de 5 % ses dépenses dans ce secteur.

1. Calculer le budget loisirs B de Mathilde dans deux ans.
   Diminuer de 5 % revient à multiplier par $1-0,05=0,95$.
   $650\times 0,95 = 617,5$.
   $\boxed{\text{La deuxième année, elle consacrera 617,5 euros à ses loisirs.}}$

2. Quel budget aura-t-elle consacré à ses loisirs au cours des deux prochaines années ?
   $650+617,5=1267,5$.
   $\boxed{\text{Au cours des deux prochaines années, elle consacrera 1267,5 euros à ses loisirs.}}$

3. Compléter le programme Python ci-dessous afin que la fonction `budget` retourne le budget total qu'elle aura consacré à ses loisirs au cours des 10 prochaines années.

```
def budget():
    B=650 .............................
    T=650 .............................
    for k in range(2,11):
        B=B*0,95.......................
        T=T+B .........................
    return(T)
```

Commentaires : Avant la boucle pour, les variables B et T ont les valeurs de la première année.
Il faut alors faire 9 tours de boucle pour aller de la 2^e^ à la 10^e^ année.

Exercice 2

1. Trouver tous les nombres réels x et y tels que $x^2-y^2=77$ et $x-y=11$.
   Comme $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$, et $x-y=11$, on obtient $(x+y)\times 11=77$, donc $x+y=7$.
   De plus, $x-y=11$, d'où, en additonnant ces deux équations, $2x=18$, et donc $x=9$.
   Enfin, comme $x-y=11$, il vient $y=x-11=9-11=-2$.
   On vérifie facilement que ce couple $(9;-2)$ convient, et c'est donc la seule solution.

2. Le nombre $1+\sqrt{5}$ est-il solution de l'équation $x^3-x^2-6x-4=0$?
   $(1+\sqrt{5})^2=1+2\sqrt{5}+5=6+2\sqrt{5}$.
   Donc $(1+\sqrt{5})^3=(6+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5})=6+6\sqrt{5}+2\sqrt{5}+2\times 5=16+8\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} f(1+\sqrt{5}) &= (1+\sqrt{5})^3-(1+\sqrt{5})^2-6(1+\sqrt{5})-4 \\ &= 16+8\sqrt{5}-(6+2\sqrt{5})-6-6\sqrt{5}-4 \\ &= 16-6-6-4+8\sqrt{5}-2\sqrt{5}-6\sqrt{5} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   L'affirmation est vraie.

Exercice 3

Résoudre les inéquations suivantes. Donner l'ensemble solution sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles.

1. $-\dfrac{2}{3}x-5<x+\dfrac{1}{2}$

   C'est une inéquation du premier degré. On isole l'inconnue x.

   $-\dfrac{2}{3}x-5<x+\dfrac{1}{2}$

   ssi $-\dfrac{5}{3}x<\dfrac{11}{2}$

   ssi $x>-\dfrac{11}{2}\times\dfrac{3}{5}$ (on a divisé les 2 membres par $-\dfrac{5}{3}<0$, l'inégalité change de sens)

   ssi $x>-3,3$.

   $\boxed{S=]-3,3;+\infty[}$.

2. $(-2x+10)(x+4)>0$.

   Valeurs clés :

   $-2x+10=0$ ssi $x=5$.

   $x+4=0$ ssi $x=-4$

x	$-\infty$		-4		5		$+\infty$
$-2x+10$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-2x+10)(x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   $\boxed{S=]-4;5[.}$

3. $\dfrac{2x+1}{(x-6)(-3x+12)}\geqslant 0$.

   Valeurs clés :

   $2x+1=0$ ssi $x=-\dfrac{1}{2}$.

   $x-6=0$ ssi $x=6$ (valeur interdite)

   $-3x+12=0$ ssi $x=4$ (valeur interdite).

x	$-\infty$		$-1/2$		4		6		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x+12$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{2x+1}{(x-6)(-3x+12)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

   $\boxed{S=\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup]4;6[.}$

4. $\dfrac{3x+7}{-x+4}\geqslant 5$.

   $\dfrac{3x+7}{-x+4}\geqslant 5$

   ssi $\dfrac{3x+7}{-x+4}-\dfrac{5(-x+4)}{-x+4}\geqslant 0$,

   ssi $\dfrac{3x+7+5x-20}{-x+4}\geqslant 0$,

   ssi $\dfrac{8x-13}{-x+4}\geqslant 0$.

   Valeurs clés :

   $8x-13=0$ ssi $x=\dfrac{13}{8}$.

   $-x+4=0$ ssi $x=4$ (valeur interdite).

x	$-\infty$		$13/8$		4		$+\infty$
$8x-13$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{8x-13}{-x+4}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

   $\boxed{S=\left[\dfrac{13}{8};4\right[.}$