1re G. Correction de l'interrogation n° 6

Exercice 1 (7 points)

1. Rappeler une formule de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.
   $S = \dfrac{(\text{premier terme } + \text{ dernier terme})}{2} \times (\text{nombre de termes})$
2. (A_n) est la suite arithmétique de premier terme $A_0 = 5$ et de raison 9.
   (a) Pour tout $n \geqslant 0$, $A_n = 5 + 9n$
   (b) $S_{20} = A_0 + A_1 + \cdots + A_{20} = 1995$
3. Donner un exemple de terme général d'une suite géométrique croissante : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 \times 2^n$
4. Donner la définition d'une suite (V_n) géométrique.
   V_n est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = V_n \times q$.
5. Soit (G_n) la suite géométrique de premier terme $G_0 = 500$ et de raison $q = 0,9$.
   (a) L'expression de G_n en fonction de n est :
   Pour tout entier n, $G_n = 500 \times 0,9^n$
   (b) En arrondissant au dixième, $S_{15} = G_0 + G_1 + \cdots + G_{15} \approx 4073,5$

Exercice 2 (5 points+1)

Au début d'une expérience, la masse des bactéries mesurée dans une solution aqueuse est de 3 mg. On estime que la masse de bactéries augmente de 14 % tous les jours. On pose $B_0 = 3$ et pour tout $n \geqslant 1$, on note B_n la masse des bactéries après n jours, exprimée en mg.

1. Calculer B_1 et montrer que $B_2 = 3,8988$.
   $B_1 = B_0 + 0,14 \times B_0 = 3 + 0,14 \times 3 = 3,42$.
   $B_2 = B_1 + 0,14 \times B_1 = 3,42 + 0,14 \times 3,42 = 3,8988$.
2. Exprimer B_{n+1} en fonction de B_n.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = B_n + 0,14 \times B_n = 1,14 \times B_n.}$
   On peut aussi justifier en rappelant qu'augmenter de 14% revient à multiplier par 1,14 (coefficient multiplicateur d'une hausse de 14 %, $c = 1 + t$). Donc $B_{n+1} = 1,14 \times B_n$.
3. En déduire la nature de (B_n), et précise les éléments caractéristiques.
   $\boxed{\text{Donc } (B_n) \text{ est la suite géométrique de premier terme } B_0 = 3 \text{ et de raison 1,14.}}$
4. Donner l'expression de B_n en fonction de n.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ B_n = B_0 \times q^n = 3 \times 1,14^n.}$
5. Déterminer la masse des bactéries présente au bout de 7 jours. Arrondir à 0,1 mg près.
   $B_7 = 3 \times 1,14^7 \approx 7,5$.
   $\boxed{\text{Au bout de 7 jours, la masse des bactéries est d'environ 7,5 mg.}}$
6. Bonus : Déterminer le nombre de jours à partir duquel la masse de bastérie dépasse 100 g.
   On cherche le plus petit entier n tel que $B_n > 100$.
   La suite est géométrique avec $B_0 = 3$ et $q = 1,14$.
   Comme $B_0 > 0$ et $q > 1$, la suite (B_n) est strictement croissante.
   Avec la calculatrice,
   $B_{26} = 3 \times 1,14^{26} \approx 90,5$
   $B_{27} = 3 \times 1,14^{27} \approx 103,2$
   $\boxed{\text{L'entier cherché est 27. La masse de bactéries dépasse 100 g au bout de 27 jours.}}$

Exercice 3 (8 points+1)

Le salaire net de Jeanne est de 1750 euros en janvier 2023. Chaque mois il augmente 7 de euros. On appelle v_0 le salaire du mois de janvier 2023, v_1 le salaire du mois de février 2023 et pour tout $n \geqslant 0$, v_n le salaire du n^{e} mois après janvier 2023.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 0,\ v_{n+1} = v_n + 7.}$
2. Nature de la suite. Eléments caractéristiques.
   $\boxed{(v_n) \text{ est la suite arithmétique de premier terme } v_0 = 1750 \text{ et de raison } 7.}$
3. Exprimer v_n en fonction de n. Justifier.
   $\boxed{\text{Donc pour tout } n \geqslant 0,\ v_n = v_0 + nr = 1750 + 7n.}$
4. À quelle date le salaire de Jeanne dépassera-t-il pour la première fois 2000 euros ?
   $v_n \geqslant 2000$ ssi $1750 + 7n \geqslant 2000$ ssi $n \geqslant \dfrac{250}{7} \approx 35,7$.
   Le plus petit entier n qui convient est 36, ce qui correspond au mois de janvier 2026. En effet, $36 = 3 \times 12$.
   $\boxed{\text{Le salaire dépasse pour la première fois 2 000 euros en janvier 2026.}}$
5. Quelle somme totale percevra-t-elle comme salaire de janvier 2023 à décembre 2033 inclus ?
   La période janvier 2023 à décembre 2033 correspond à exactement 11 années, soit $11 \times 12 = 132$ mois.
   Il s'agit donc de calculer la somme des 132 premiers termes de la suite (v_n), de v_0 à v_{131}.
   $v_{131} = v_0 + 131r = 1750 + 131 \times 7 = 2667$.
   $$\begin{aligned} v_0 + v_1 + \cdots + v_{131} &= \frac{v_0 + v_{131}}{2} \times 132 \\ &= \frac{1750 + 2667}{2} \times 132 \\ &= 291\,522 \end{aligned}$$
   $\boxed{\text{Le montant total des salaires accumulés sur la période janvier 2023-décembre 2033 est de 291 522 euros.}}$
6. Bonus : À partir de quelle date la somme totale des salaires dépasse-t-elle 300 000 euros ?
   Posons $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. On cherche le plus petit entier n tel que $S_n > 300000$.
   $$\begin{aligned} \frac{v_0 + v_n}{2} \times (n+1) &> 300000 \\ (1750 + 1750 + 7n)(n+1) &> 600000 \\ (7n + 3500)(n+1) &> 600000 \\ 7n^2 + 3507n + 3500 - 600000 &> 0 \\ 7n^2 + 3507n - 596500 &> 0 \end{aligned}$$
   $\Delta = b^2 - 4ac = 3507^2 - 4 \times 7 \times (-596500) = 29001049 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \approx -635,2$
   $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \approx 134,2$.
   Le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines, ici $a = 7 > 0$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$7x^2 + 3507x - 596500$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Donc le plus petit entier (naturel) n tel que $7n^2 + 3507n - 596500 > 0$ est 135.
   $135 = 11 \times 12 + 3$. Le mois correspondant vient 11 ans et 3 mois après janvier 2023, c'est donc avril 2034.
   $\boxed{\text{La somme des salaires dépasse 300 000 euros pour la première fois en avril 2034.}}$