

# Chapitre 1 : Proportion

## I Proportion dans une population

Vocabulaire.

Les éléments qui constituent une population sont les individus de cette population. Le nombre d'éléments d'une population  $E$  est appelé l'effectif de  $E$ .

Une sous-population  $A$  de  $E$  est une population dont tous les individus sont dans  $E$ . On dit que  $A$  est inclus dans  $E$  et on note  $A \subset E$ .

### Définition

Soit  $E$  une population non vide.

La proportion (ou fréquence) d'une sous-population  $A$  de  $E$  est  $f = \frac{n_A}{n_E}$  où  $n_A$  est l'effectif de la sous-population  $A$  et  $n_E$  l'effectif de  $E$ .

On retiendra :

$$\text{fréquence} = \frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}$$

### Remarque

1. Une proportion (fréquence) est un réel compris entre 0 et 1 (puisque  $0 \leq n_A \leq n_E$ ).
2. Une proportion peut s'écrire sous forme de fraction, de nombre décimal, ou de pourcentage (parfois en arrondissant).
3. On dira que  $A$  représente  $x$  % de  $E$  si  $\frac{n_A}{n_E} = \frac{x}{100}$ .

### Exercice 1 (Calcul mental)

1. Écrire les proportions sous forme de pourcentage :  $\frac{1}{4}$  ;  $\frac{2}{5}$  ;  $\frac{9}{10}$  ;  $\frac{1}{8}$  ;  $\frac{4}{5}$
2. Écrire les proportions sous forme de pourcentage : 0,02 ; 0,95 ; 0,003 ; 0,25 ; 0,0358
3. Écrire les pourcentages sous forme décimale : 1,5 % ; 10 % ; 0,3 % ; 60 % ; 45,2 %
4. Écrire les proportions sous forme de fraction : 0,02 ; 60 % ; 5 % ; 0,7 ; 0,25

### Remarque

La relation  $p = \frac{n_A}{n_E}$  peut également servir à trouver un effectif.

En particulier, si l'on connaît  $p$  et  $n_E$ , on a  $n_A = p \times n_E$ .

### Exercice 2 (calcul mental)

Calculer :

1. 1% de 428
2. 2 % de 300

3. 5 % de 4000
4. 20 % de 60

### Exercice 3

On interroge un groupe de 500 personnes composé de 60% de femmes. 20% des hommes ne font pas de sport, et 15 % des femmes ne font pas de sport.

1. Compléter les effectifs dans le tableau.

|        | Sportifs | Non sportifs | Total |
|--------|----------|--------------|-------|
| Hommes |          |              |       |
| Femmes |          |              |       |
| Total  |          |              | 500   |

2. Déterminer les proportions suivantes, puis interpréter en pourcentage :
  - (a)  $p_1$  de sportifs sur l'ensemble du groupe,
  - (b)  $p_2$  d'hommes sportifs dans le groupe,
  - (c)  $p_3$  de femmes parmi les sportifs,
  - (d)  $p_4$  d'hommes parmi les non sportifs.

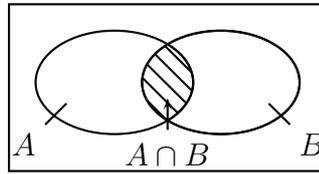
### Remarque

1. Pour des sous-populations d'une même population  $E$ , les proportions sont rangées dans le même ordre que les effectifs (elles sont proportionnelles aux effectifs).
2. Pour des populations de référence différentes, l'ordre des proportions n'est pas nécessairement celui des effectifs.

## II Réunion et intersection

### 1. Intersection de deux ensembles.

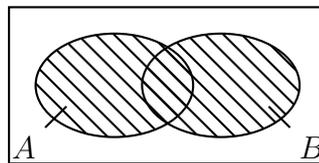
L'intersection de deux ensembles est l'ensemble des éléments communs aux deux ensembles.



$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$$

### 2. Réunion de deux ensembles.

La réunion de deux ensembles est l'ensemble des éléments appartenant à au moins l'un des deux ensembles.



$A \cup B$  est la partie hachurée.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

### Propriété (proportion d'une réunion)

Soient  $A$  et  $B$  des sous-populations d'une population  $E$  non vide.

Notons respectivement  $p_A$ ,  $p_B$ ,  $p_{A \cap B}$  et  $p_{A \cup B}$  les proportions des sous-populations  $A$ ,  $B$ ,  $A \cap B$  et  $A \cup B$ .

$$p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}$$

### Démonstration

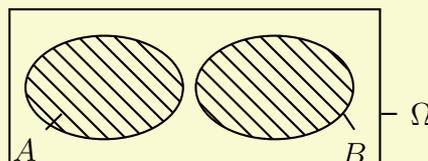
Sur les effectifs, on a l'égalité  $n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}$ .

En divisant par l'effectif total de la population, on a  $\frac{n_{A \cup B}}{n_E} = \frac{n_A}{n_E} + \frac{n_B}{n_E} - \frac{n_{A \cap B}}{n_E}$ , c'est-à-dire

$$p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}. \quad \square$$

### Définition

On dit que deux sous-populations  $A$  et  $B$  sont disjointes lorsqu'elles n'ont aucun individu en commun :  $A \cap B = \emptyset$ .



**Propriété**

Soient  $A$  et  $B$  des sous-populations d'une population  $E$  non vide.

Si  $A$  et  $B$  sont disjointes, alors  $p_{A \cup B} = p_A + p_B$ .

**Exercice 4**

On inspecte 500 appareils, et on note que 25 ont le défaut a, 19 ont le défaut b, 12 ont le défaut c.

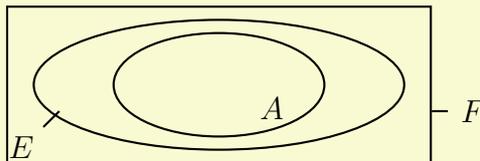
Parmi les appareils défectueux, 5 ont à la fois le défaut a et le défaut b, les autres ont un seul défaut.

Déterminer les proportions  $p_{a \cup b}$  et  $p_{b \cup c}$ .

### III Proportions et inclusions successives

**Propriété**

Soit  $A$  une sous-population  $A$  de  $E$ , et  $E$  une sous population de  $F$ .



Si  $p$  est la proportion de  $A$  dans  $E$  et  $p'$  celle de  $E$  dans  $F$ , alors la proportion de  $A$  dans  $F$  est  $p \times p'$ .

**Démonstration**

$p \times p' = \frac{n_A}{n_E} \times \frac{n_E}{n_F} = \frac{n_A}{n_F}$ , qui est bien la proportion de  $A$  dans  $F$ . □

Exemple :

Dans une famille,  $\frac{2}{3}$  des membres sont musiciens, et parmi ces derniers,  $\frac{3}{4}$  jouent du violon.

Déterminer la proportion des membres de la famille qui jouent du violon.

### Exercice 1

Un laboratoire teste l'efficacité d'un vaccin sur des souris.

Toutes ont reçu le virus étudié, certaines ont été vaccinées mais pas les autres.

Certaines ont développé la maladie, d'autres pas.

Sur 320 souris étudiées, 170 ont été vaccinées.

230 souris ont développé la maladie, et parmi celles-ci 130 avaient reçu le vaccin.

1. Compléter les effectifs dans le tableau.

|                      | Souris malades | Souris non malades | Total |
|----------------------|----------------|--------------------|-------|
| Souris vaccinées     |                |                    |       |
| Souris non vaccinées |                |                    |       |
| Total                |                |                    |       |

2. Déterminer les proportions suivantes, en pourcentage à 1 % près :

- (a)  $p_1$  de souris n'ayant pas développé la maladie.
- (b)  $p_2$  de souris non vaccinées.
- (c)  $p_3$  de souris ayant développé la maladie parmi celles qui ont été vaccinées.
- (d)  $p_4$  de souris ayant développé la maladie parmi celles qui n'ont pas été vaccinées.

3. Que peut-on penser de l'efficacité du vaccin ?

### Exercice 2

Un institut de sondage a interrogé un groupe de 800 personnes.

25 % des personnes interrogées habitent en zone rurale, les autres en zone urbaine.

60% des personnes interrogées ont été consultées par téléphone, les autres en face à face.

55 % des personnes habitant en zone urbaine ont été consultées par téléphone.

1. Compléter les effectifs dans le tableau.

|             | Zone rurale | Zone urbaine | Total |
|-------------|-------------|--------------|-------|
| Téléphone   |             |              |       |
| Face à face |             |              |       |
| Total       |             |              | 800   |

2. Déterminer les proportions suivantes, puis interpréter en pourcentage :

- (a)  $p_1$  de personnes habitant en zone urbaine.
- (b)  $p_2$  de personnes habitant en zone rurale et ayant été interrogées par téléphone
- (c)  $p_3$  de personnes habitant en zone urbaine parmi les personnes qui ont été consultées par téléphone.
- (d)  $p_4$  de personnes habitant en zone urbaine parmi les personnes qui ont été consultées en face à face.

3. Les proportions  $p_3$  et  $p_4$  de la question précédente sont-elles dans le même ordre que les effectifs des sous-populations correspondantes ? Expliquer.